This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

Ad Meyer.

Ad. Meyer.

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling A.

Første Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1890.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
83280
ASTOR, L OX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1897.

THE ASTOR LIBRARY

Indhold.

Side

C. Andersen, stud. polyt.
Løste Opgaver Nr. 12, 14, 16, 17, 19, 20, 21.
A. S. Bang, stud. mag.
En geometrisk Sætning 102
Opgaver til Løsning Nr. 10, 11, 12. 13.
B — x.
Løste Opgaver Nr. 44, 47.
J. Byskov, Lærer ved Gjedved Seminarium.
Opgaver til Løsning Nr. 23 og 24.
Løste Opgaver Nr. 25, 37, 38, 42.
J. C. Carlsen, Mathematiklærer.
Opgaver til Løsning Nr. 4, 5 og 9.
Løste Opgaver Nr. 1, 2, 3, 7, 10—14, 18—24.
S. A. Christensen, cand. mag.
Om den indledende Geometriundervisning i de højere Skoler . . . 113
P. T. Foldberg, cand. mag.
Nogle pædagogiske Betragtninger 129
Opgaver til Løsning Nr. 7 og 8.
C. Friderichsen, exam. polyt.
Løste Opgaver Nr. 5.
Alf Guldberg, dr., Bygdö.
Løste Opgaver Nr. 5.
Ansgar Guldberg, stud. real., Bygdö.
Løste Opgaver Nr. 16 og 17.
Chr. Hansen, cand. mag., Realskolebestyrer i Hjørring.
Definition mod Vedtægt, 1ste Art. 17
— 2den Art. 41
Fire afsluttende Noter 72
Opgaver til Løsning Nr. 16—20, 27—35, 55.
P. V. Hansen, stud. mag.
En Sætning om π 25
Sophus Hansen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 4, 10, 19, 20, 24.
Ejnar Hertzsprung, Skolediscipel.
Opgave til Løsning Nr. 3.
E. H.
En Udvidelse 103

Side

E. B. Holst, dr. phil., Christiania.
Opgave til Løsning Nr. 21.
J. L. W. V. Jensen, Ingeniør.
Opgave til Løsning Nr. 56.
N. P. Jensen, Lærer.
Notitser 148
C. Jonsen, Lærer, Falster.
Notitser 147
A. Jørgensen, stud. med. & chir.
Løste Opgaver Nr. 37, 40, 42.
L. F. Lautrup-Jörgensen, Vamdrup.
Løste Opgaver Nr. 30, 34, 37, 39, 40, 42.
A. Juel, Lærer i Rønne.
Løste Opgaver Nr. 22, 23.
C. Juel, dr. phil.
Om Konstruktion af anamorfotiske Billeder 21
Opgave til Løsning Nr. 6.
Chr. Krüger, Rektor for Latinskolen i Helsingør.
Brev til Redaktionen (ang. Artiklen: Definition mod Vedtægt) . . 43
Endnu en Gang $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x-b^2} = a-b$ 104
P. A. Larsen, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 25, 38, 57.
Løste Opgaver Nr. 28, 29, 30, 31, 32, 35, 37, 42, 47, 48.
A. L — n.
Løste Opgaver Nr. 21, 28.
M. Chr. Madsen, Lærer ved Navigationsskolen i Rønne.
Elementær Behandling af det keplerske Problem 7
Vilh. Madsen, stud. polyt.
Opgave til Løsning Nr. 14.
Theodor Ney, stud. polyt., Gøteborg.
Opgave til Løsning Nr. 2.
Løste Opgaver Nr. 1, 3, 4, 5, 8, 30, 32, 34, 35, 39, 40, 44, 45, 47, 50.
H. Nissen, Lærer i Randers.
Om Vinklers Tredeling, kubiske Ligninger og det deliske Problem 2
Blandinger 61
Løste Opgaver Nr. 15.
Novalni.
Opgaver til Løsning Nr. 22, 39, 40.
Løste Opgaver Nr. 9, 37.
Carl Otterstrøm, Skolediscipel.
Opgave til Løsning Nr. 59.
Kr. Pedersen, Bestyrer af Tøxens Skole i Kjøge.
Løste Opgaver Nr. 24.
Johs. Petersen, stud. mag.
Opgave til Løsning Nr. 58.
Løste Opgaver, Nr. 25, 28.
P. Petersen, Kursusbestyrer.
Løste Opgaver Nr. 18, 19.

Side

P. R. Petersen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 1, 8, 16.
(p + t)
Løste Opgaver Nr. 16.
C. E. Schlichtkrull, stud. polit.
Løste Opgaver Nr. 2.
F. Thaarup, Adjunkt ved Sorø Akademi.
Den ubestemte Ligning af første Grad med to Ubekjendte 1
E. Valentiner, cand. mag.
Opgave til Løsning Nr. 37.
A. Weis, cand. polyt.
Opgave til Løsning Nr. 36.
J. R. Åkerlund, Lektor ved den tekniske Skole i Borås.
Opgaver til Løsning Nr. 1 og 15.
Løste Opgaver Nr. 6, 8, 11, 12, 22—24.
Åsted, Adjunkt ved Rønne højere Realskole.
Udvidelse af Opgave Nr. 5. 58
Opgave til Løsning Nr. 26.
Redaktionsbemærkning 74

Opgaver til Løsning.

Nr. 1— 8 15
- 9—15 39
- 16—21 63
- 22—24 80
- 25—29 95
- 30—54 108
- 55—59 159

Løste Opgaver.

Nr. 1—4, 7. 35
- 5 og 8. 56
- 6, 10, 14, 16, 17. 75
- 15, 18, 19, 20, 22, 23. 90
- 21, 24, 25, 28, 29. 105
- 9, 48. 127
- 30, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 50. 149

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen (Januar 1890) 9
— — (Marts —) 53
— — (Juni —) 65
— — (Oktober —) 124
Afgangsexamen for studerende (Januar 1890) . . . . 12 og 27
— — (Juni —) 68
Adgangsprøven til Officersskolens næstældste Klasse (Marts) 29
Søofficersskolens Overgangsprøve 81

	Side
Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt	83
Skolelærerexamen	86
Extraordinær Skolelærerexamen	119
Skolelærerindeexamen (Oktober)	122
Den kongelige Landbohøjskoles Examen (Oktober)	137

Norske Examensopgaver.

Realartium 1890	97
Latinartium —	99
Middelskoleexamen	100

Svenske Examensopgaver.

Maturitetsexamen (Vårterminen 1890)	45
— (Høstterminen —)	139
Korrespondance	40, 63—64, 80, 96, 160
Tilsendte Bøger	64
Rettelser	40, 96.

Den ubestemte Ligning af første Grad med to Ubekjendte.

(Af F. Thaarup).

Ligningen $ax + by = c$ giver, naar alle Bogstaverne skulle betyde hele Tal, idet tillige a og b ere indbyrdes primiske, to Værdier for x imellem Grændserne $\pm b$ og ligeledes to Værdier for y imellem Grændserne $\pm a$. Hvis x eller y kan have Værdien o, bliver denne dog den eneste Værdi mellem de nævnte Grændser.

Disse Minimalværdier for x og y, hvortil eventuelt en Grændseværdi medregnes, kunne tillige være sammenhørende Værdipar. Dette vil saaledes være Tilfældet, naar f. Ex. a er numerisk større end baade b og c. Er nemlig under denne Forudsætning α en af y's Minimalværdier, maa den tilsvarende Værdi for x:

$$\frac{c}{a} - \frac{b\alpha}{a},$$

selv om den bliver at bestemme ved en Addition af disse to Brøkers numeriske Værdier, altid være numerisk $\leqq b$.

Man kan derfor paa følgende Maade umiddelbart finde en Minimalværdi for den af de Ubekjendte i den almindelige Ligning

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

der har den numerisk største Koefficient.

Er f. Ex. a numerisk $> b$, dividerer man paa begge Sider med b's numeriske Værdi og bestemmer Divisionsresterne. a giver Resten a_1, der tages numerisk $< \frac{b}{2}$, x Resten x; by giver et ubestemt Multiplum af Divisor til Rest, f. Ex. by_1,

og endelig giver c Resten c_1, idet c_1 er numerisk $< \frac{b}{2}$. Man har derefter Ligningen

$$a_1 x + by_1 = c_1, \qquad (2)$$

hvori Minimalværdierne for x og y_1 svare til hinanden, fordi baade a_1 og c_1 ere numerisk $< b$. Denne Ligning divideres paa samme Maade med den numeriske Værdi af a_1, hvorved man kommer til

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_2, \qquad (3)$$

og saaledes vedbliver man, indtil man faaer en Ligning, hvori o indsat for den ene Ubekjendte gjør den anden til et helt Tal, der bliver en Minimalværdi, fordi o er en saadan. Man gaaer saa efterhanden tilbage og faaer overalt Minimalværdier lige til Ligning (2) inklusive, hvori selve det oprindelige x indgaaer.

Et Exempel vil let tydeliggjøre Fremgangsmaaden. Tilvenstre for Stregen regnes oventra nedad, tilhøjre i modsat Retning.

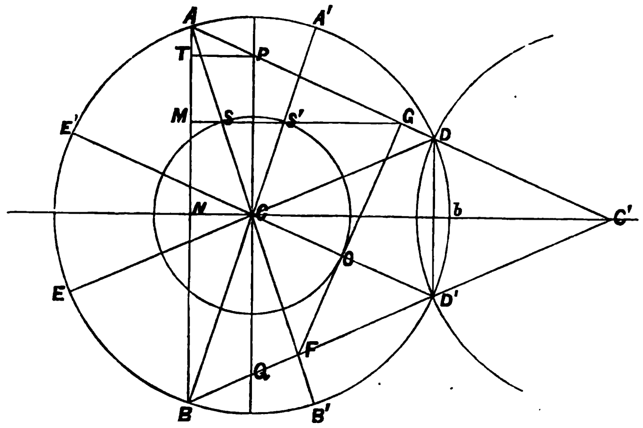
$152x + 59y = 61432$	$y = 1000$
$-25x + 59y_1 = 13$	$x = 16$
$25x_1 + 9y_1 = 13$	$y_1 = 7$
$-2x_1 + 9y_2 = 4$	$y_2 = 0, x_1 = -2.$

Om Vinklers Tredeling, kubiske Ligninger og det deliske Problem.

En elementær Undersøgelse af H. Nissen.

Naar to lige store excentriske Cirkler skære hinanden, ville Sekanterne gjennem de to Skæringspunkter og den ene Cirkels Centrum i den anden Cirkel afskære en mellemliggende Bue, der er 3 Gange saa stor som den første (b).

Fig. 1:



Paa Figuren, hvor ⌣ b er valgt mindre end 60^0, er ∠ ACB = 3DC'D'. Thi trækkes Diametrene DE og D'E', ville, da CDC'D' er en Rhombe, de parallele Korder AD og E'D' samt ED og BD' afskære lige store Buer: AE' = b og EB = b, og endelig ville ogsaa Topvinkelsbuerne være lige store: EE' = b. Altsaa er ⌣ AB = 3b.

Oprejses paa Midten af én af de nævnte Sekanter en vinkelret (GF), vil den være Tangent til en koncentrisk Cirkel om C med halv saa stor Radius som de givne. Thi: Periferivinklen A afskærer en Bue = 2b og er altsaa = Centervinklen C', eller △ AC'F er ligebenet; den vinkelrette paa Midten af AC' vil da ikke blot gaa gjennem Toppunktet F, men ogsaa være vinkelret paa Midten O af Paralleltransversalen CD' og altsaa være Tangent til den koncentriske Cirkel i O.

Drages Centerlinien CC' og Korden AB, vil en vinkelret (MG) paa Midten af AN som Parralleltransversal i den retvinklede Trekant ANC' ogsaa gaa gjennem Midtpunktet G i Sekanten AC'. Det vil fremdeles indses, at MG gaar gjennem Midtpunkterne S og S' af Radierne AC og A'C.

Ved Hjælp af Passer og Triangel (retvinklet) vil man altsaa i Følge det foregaaende kunne tredele en Vinkel. Fremgangsmaaden bliver denne: Den givne Vinkel A'CB' med dens Topvinkel ACB halveres ved en Linie NC'. Med

en vilkaarlig Radius slaas om C en Cirkel, der skærer AC og A'C i S og S'; med en dobbelt saa stor Radius slaas om C en anden Cirkel, der skærer AC i A. Gjennem S og S' dragesen Linie MG. Triangelen lægges da saaledes, at den ene Kathete gaar gjennem A, medens den anden rører den mindste Cirkel og den rette Vinkels Spids ligger i Linien MG. En Linie AG forlænget (eller en Linie CD $\neq$ GA) afskærer da $^1/_3$ af Buen A'B'.

Methoden har vel ikke nogen videre praktisk Betydning, men den betragtede Figur har Interesse derved, at den direkte kan vise, hvorledes den geometriske Løsning af visse Ligninger af tredje Grad kan reduceres til Tredelingen af en Vinkel.

For at se dette ville vi undersøge, hvorledes Sekanten AC' varierer i Forhold til AB (Korden til den Vinkel, som tredeles), medens AC (Radius) er konstant. Oprejse vi i C en Diameter vinkelret paa Centerlinien CC', vil den skære Sekanterne AC' og BC' i P og Q, og det vil da ses, at DD'CP og DD'QC ere Parallelogrammer, eller PD = CD' = Radius, altsaa PC' = 2 Radier. Da saaledes C'P er konstant eller uafhængig af Korden AB, ændres vor Opgave til at undersøge, hvorledes AP varierer i Forhold til AB, eller, hvad der er endnu nemmere i Forhold til TP der er lig og parallel med NC. Vi have da følgende Proportion: $\frac{AP}{AT} = \frac{AC'}{AN}$.

For Kortheds Skyld sætte vi AP = x, C'P = 2a, NC = TP = g. Vi faa da $AT = \sqrt{x^2 - g^2}$, $AC' = 2a + x$, $AN = \sqrt{a^2 - g^2}$.

Proportionen kommer derefter til at se saaledes ud:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - g^2}} = \frac{2a + x}{\sqrt{a^2 - g^2}},$$

hvilken Ligning paa almindelig Maade ordnes til

$$x^3 + 3ax^2 = 4ag^2. \text{ *)}$$

*) Ligningen $x^3 + Ax + B = 0$ kan altid ved Substitutionen $x = y + \sqrt{-\frac{A}{3}}$ bringes paa den ovenstaaende Form — hvor $0 < g^2 < a^2$ — saafremt $\left(\frac{A}{3}\right)^3 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \angle 0$.

Red.

Sættes AB $=$ k, er $g^2 = a^2 - \frac{k^2}{4}$, altsaa $x^3 + 3ax^2 = 4a^3 - ak^2$.

Naar a og g ere givne, idet $a > g$, kan den kubiske Ligning $x^3 + 3ax^2 = 4ag^2$ altsaa med den ovennævnte Tilnærmelse løses geometrisk, eller: Parallelopipedet $4ag^2$, hvis Grundflade er g^2, og hvis Højde er 4a, kan forvandles til en Tærning $+$ et Parallelopiped med samme Grundflade som Tærningen og en Højde $= 3a$.

Konstruktionen af Tærningens Kant x bliver den (se Fig. 1): Med a som Radius slaaes en Cirkel. Fra C ud ad en Radius afsættes NC $=$ g; i N oprejses den vinkelrette AB; Diametrene AB′ og BA′ drages; Vinklen A′CB′ tredeles; gjennem Delingspunktet D drages Linien AD, til den skærer Forlængelsen af NC i C′. Linien AC′ er da $= 2a + x$ og AP $=$ AC′ $- 2a = x$.

Vi ville nu gaa over til det deliske Problem, hvor det gjælder om at bestemme Kanten $a + x$ af en Tærning, der er dobbelt saa stor som en given Tærning med Kanten a. I det Øjemed betragtes atter den samme Figur, hvoraf man udleder

$$\frac{2a}{CP} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - g^2}}.$$

Sættes CP $= \sqrt{m}$ (hvor m er et Tal), og elimineres g ved Hjælp af Ligningen

$$x^3 + 3ax^2 = 4ag^2,$$

faar man

$$mx^3 + 3max^2 + 4a^2 x = 4a^3$$

$$\text{eller } x^3 + 3ax^2 + \frac{4a^2}{m} x = \frac{4a^3}{m}.$$

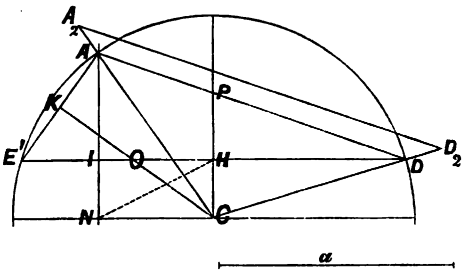
Sættes $\frac{4}{m} = 3$, $m = g\frac{4}{3}$, følgelig CP $= g \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$, gaar Ligningen altsaa over til

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + a^3 = 4a^3,$$

der giver $$x + a = a\sqrt[3]{4}.$$

Af g og $\frac{2g\sqrt{3}}{3}$ gjælder det nu om at konstruere x eller, hvad der vil være lige saa let, a + x.

Fig. 2:



Lad os tænke os Konstruktionen løst, AD = a + x (DP = a og PA = x), CN = g, CP = DD' = AE' = g $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Det ses da, at Korden AE' = CP = 2 CH er Hypotenuse i den retvinklede Trekant AIE' og saaledes beliggende, at den vinkelrette (KC) paa Midten af den gaar gjennem C (som er den fjerneste Spids af Rektanglet CNIH).

Er der nu givet os en Linie a som Kanten paa en Tærning, saa konstrueres a $\sqrt[3]{4}$, Kanten til en Tærning med 4 Gange saa stort Kubikindhold, saaledes: Der tegnes et Rektangel CNIH, hvis Sider forholde sig til hinanden som 1 : $\frac{\sqrt{3}}{3}$, idet HN = 2 CH.

Rektanglets Sider forlænges, om C slaas en Bue fra Linien HI til NI, saaledes at dens Korde AE' er = HN = 2HC, hvilket findes ved Prøve. Derefter afsættes CD = CA. Fra C gjennem A og D tegnes Linierne $CA_2 = CD_2 = a$. Vi have da $A_2D_2 = a\sqrt[3]{4}$.*)

Tilnærmelsesvis vil Buen AD, hvori a + x er Korde, være 105°. Thi:

log. sin. 52° 30'' = 9,89947 — 10
log. 0,79336 = 9,89947 — 10.

---

*) Den ovenstaaende approximative Løsning af det deliske Problem giver aabenbart ikke nogen god Tilnærmelse. Vi have dog ment det rigtig at medtage den ovenstaaende Figur, da Forf. øjensynlig ved den er bleven ledet til den paafølgende praktiske Tilnærmelsesmaade. Red.

Er da Radius = 1, er Korden til 105^0 = 2 . 0,79336

= 1,58672

men $\sqrt[3]{4}$ = 1,58740.

Fejlen er da mindre end $\frac{1}{1000}$.

Vil man da tilnærmelsesvis konstruere Siden til en Tærning 4 Gange saa stor som en given, hvis Side er = a, saa at Fejlen ikke bliver over $\frac{1}{1000}$ a, kan dette ske ved i en Cirkel med Radius a at drage Korden til en Bue paa 105^0. ($105^0 = 90^0 + \frac{90^0 - 60^0}{2}$). Korden til Buen er da Siden til den søgte Tærning.

Naar man har konstrueret a $\sqrt[3]{4}$, lader ogsaa Linien a $\sqrt[3]{2}$ sig let konstruere.

Man har nemlig

$$\frac{2a}{a\sqrt[3]{4}} = \frac{a\sqrt[3]{4}}{a\sqrt[3]{2}},$$

saaledes at a $\sqrt[3]{2}$ er den tredje Proportional til 2a og a $\sqrt[3]{4}$.

Elementær Behandling af det keplerske Problem. *)

(Af M. Chr. Madsen).

Først findes et Udtryk for det Areal, som en Radius vektor i en Ellipse beskriver, naar den drejes om Brændpunktet og dens Begyndelsesstilling er fra Brændpunktet til nærmeste Toppunkt.

---

*) Tiltrods for, at en lignende elementær Udvikling findes paa flere Steder f. Ex. i H. Gyldéns Framställning af Astronomien, have vi dog tænkt — hvad ogsaa Forfatteren mener — at det kunde være ønskeligt for Lærere at have den ved Haanden til eventuelt Brug ved Undervisningen.
Red.

A er Toppunktet, O Ellipsens Centrum, og F Brændpunktet, OA = a, FP antages at være Vektorradiens Stilling, og Vinklen AFP = φ. Fra P fældes en vinkelret paa Ellipsens store Akse, og den forlænges ud over P til Q, der ligger i Cirklen over Ellipsens store Akse som Diameter. Vinklen AOQ = u. FP = r. Man udleder da af en Figur (som Læseren bedes tegne selv),

$$r \cdot \cos \varphi = a \cos u - ea,$$

$$r = a - ea \cos u,$$

hvoraf

$$r = a\,(1 - e \cos u)$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}.$$

Arealet af Cirkelsektoren AOQ er $\frac{1}{2}\,a^2 \cdot u$, idet u er maalt i Tal; drejes denne Sektor om OA ud af Planen en Vinkel v bestemt ved $\cos v = \frac{b}{a}$, hvor b er Ellipsens lille Halvakse, da vil den projiceres paa sin oprindelige Plan i Ellipsesektoren AOP, hvis Areal altsaa er

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot u \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{2} ab \cdot u = \frac{1}{2}\, a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot u.$$

Arealet af Trekanten OFP er $\frac{1}{2}$ ea r sin φ, hvilket alene udtrykt ved a, e og u bliver $\frac{1}{2}\, ea^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin u$. Arealet AFP, som Radius vektor har beskrevet er da

$$U = \frac{1}{2}\, a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot u - \frac{1}{2}\, ea^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin u$$

$$= \frac{1}{2}\, a^2 \sqrt{1 - e^2}\,(u - e \sin u).$$

Ved Hjælp af dette Udtryk og den keplerske Lov om Arealerne, naar man til den keplerske Ligning, idet man da har (T betegner den Tid, hvori hele Ellipsen beskrives en Gang, og t den Tid, hvori Radius vektor drejer sig fra A til P)

$$\frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}}{\frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (u - e \sin u)} = \frac{T}{t},$$

hvoraf

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{T} \cdot t.$$

Man vil desuden finde, naar man udfører de nødvendige simple Regninger,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} u.$$

Endvidere fandt vi før

$$r = a (1 - e \cos u),$$

og man har da elementært udledet de Ligninger, som tjene til Løsning af det keplerske Problem at finde Planeternes Koordinater udtrykte ved Tiden.

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

Januar 1890.

Arithmetik.

1. I en By med 9000 Indbyggere dør der et Aar 313 Personer, medens der samme Aar fødes 538 Børn. I det samme Forhold forøges Folkemængden i de følgende Aar. Hvor længe varer det, før den er voxet 50 p. Ct.?

2. Find x af Ligningen

$$3x + \frac{b}{ax} = \frac{ab}{c^2} x - \frac{c - 2ax}{a}.$$

Specielt betragtes det Tilfælde, hvor c er Mellemproportional mellem a og b.

3. Find Differensen og Leddenes Antal i en Differensrække med et ulige Antal Led, hvor første Led er — 5, det midterste Led er 4 og Leddenes Sum er 28.

Opløsning. 1. Den aarlige Tilvæxt er

$$\frac{538 - 313)\ 100}{9000}\ \text{p. Ct.} = 2{,}5\ \text{p. Ct.}$$

Det søgte Antal (n) Aar findes da af Ligningen $(1{,}025)^n = 1{,}5$,

hvoraf $$n = \frac{\log\ 1{,}5}{\log\ 1{,}025} = 16{,}426.$$

Saaledes vil hengaa ca. 16,4 Aar.

2. Multipliceres Ligningen med axc^2 og ordnes, faas

$$(ac^2 - a^2b)\ x^2 + c^3x + bc^2 = 0,$$

$$x = \frac{-c^3 + \sqrt{c^6 - 4bc^2\ (ac^2 - a^2b)}}{2\ (ac^2 - a^2b)}.$$

Er $c^2 = ab$, bliver den ene Rod uendelig. Udtrykket for den anden faaer ubestemt Form; den findes imidlertid ved at gaa tilbage til den oprindelige Ligning, der da reduceres til $c^3x + bc^2 = 0$, hvoraf $x = -\frac{b}{c}$.

3. Leddenes Antal være $2x + 1$, midterste Led bliver altsaa $-5 + xd = 4$ hvoraf $xd = 9$; indsættes denne Værdi i Ligningen

$$(-10 + 2xd)\ \frac{2x + 1}{2} = 28,$$

faas $$2x + 1 = 7 \text{ og } d = 3.$$

Geometri.

1. I en Trekant ABC halveres Siden AB; BC deles i 3 lige store Dele og CA i 5 lige store Ddle. Midtpunktet C_1 af AB forbindes med det Delingspunkt A_1 paa BC, der ligger nærmest ved C; A_1 forbindes med det tredje Delingspunkt B_1 paa CA (regnet fra C.) Endelig forbindes B_1 med C_1. Hvor stor en Del af den hele Trekant ABC udgør enhver af de fire Trekanter, hvori den er delt?

2. Hvor mange geografiske Mil er Breddecirklen (parallel med Æqvator) gennem Kristiania, der ligger paa 60^0 nordlig Bredde?

En geografisk Mil er $^1/_{15}$ af en Buegrad af Æqvator, og Jorden betragtes som en Kugle.

3. Om en given Cirkel skal omskrives en Trekant, der er ligedannet med en given Trekant.

Opløsning. 1. $\frac{\triangle AC_1B_1}{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$; $\frac{\triangle A_1CB_1}{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ og $\frac{\triangle A_1BC_1}{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ altsaa $\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC} = \frac{4}{15}$.

2. I en Afstand af 60^0 fra Ækvator har Breddecirklen en Radius halv saa stor som Ækvators, dens Længde er altsaa det halve af Ækvators eller $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 360 = 2700$ geografiske Mil.

3. Til den givne Cirkel trækkes en vilkaarlig Tangent; fra denne afsættes, til samme Side som Cirklen, to af den givne Trekants Vinkler, og Tangenter trækkes parallelt med det andet Ben af hver af de afsatte Vinkler.

Praktisk Regning

1. En Mand anbringer samtidigt to lige store Kapitaler i to forskjellige Forretninger. Han hæver Kapitalerne tillige med Udbyttet efter 7 Aars Forløb og faar derved lige store Summer fra de to Forretninger. I den ene af disse er der hvert Aar tjent $8^3/_4$ p. Ct. I den anden tjentes der de 3 første Aar $22^1/_2$ p. Ct. p. a., men de to følgende Aar kun $9^1/_4$ pro mille p. a. I de to sidste Aar tabtes der hvert Aar 100x p. Ct. Find x.

2. En Mand købte i Skoven for 70 Kr. 3 cylindriske Træstammer, af hvilke enhver havde en Omkreds af 6 Fod, medens Længderne vare henholdsvis 24, 30 og 34 Alen. Omkostningerne ved Savning, Transport o. s. v. vare 10 p. Ct. af Indkøbsprisen. Han beholdt selv 2 Favne Brænde og fik for Resten saa meget, at han fik sine Udgifter dækkede og

desuden 3 Kroner. Hvor meget fik han for Favnen? En Cylinders Rumindhold er Produktet af Højde og Grnndflade. En Favn er 3 Alen høj, 3 Alen lang og 1 Alen bred. (Der skal ikke tages Hensyn til Mellemrummene.) $\pi = \frac{22}{7}$.

Opløsning. 1. $a(1{,}0875)^7 = a(1{,}225)^8(1{,}00925)^2(1-x)^2$; $2\log(1-x) = 7 . \log 1{,}0875 - 3\log 1{,}225 - 2\log 1{,}00925$; $\log(1-x) = 0{,}991295 - 1$; $1 - x = 0{,}98016$; $x = 0{,}01984$.

2. Grundfladen $= \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 . \pi = \frac{63}{22}$ Kvadratfod; der er altsaa kjøbt $\dfrac{\frac{63}{22}(48 + 60 + 68)}{2 . 6 . 6} = 7$ Favne, og der er solgt 5 Favne til en Pris af $70 + 7 + 3 = 80$ Kr., altsaa hver Favn solgt for 16 Kr.

Afgangsexamen for studerende.

Januar 1890.

Arithmetik.

2. Find de reelle Værdier af x og y, som tilfredsstille Ligningen

$$y\sqrt{2} - x\sqrt{-3} = \left(\frac{x}{2} + y\sqrt{-b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Opløsning. Ved Kvadrering faas

$$2y^2 - 3x^2 - 2xy\sqrt{-6} = \frac{x}{2} + y\sqrt{-b}.$$

For reelle Værdier af b, x og y maa, idet b er positiv,

$$2y^2 - 3x^2 = \frac{x}{2}$$

$$-2xy\sqrt{6} = y\sqrt{b},$$

hvoraf enten $y = 0$ og $x = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{cases}$

eller $x = -\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{6}}$ og $y = \pm\sqrt{\frac{3b - \sqrt{6b}}{48}}$,

hvilken sidste Værdi kun er reel, naar $b \geq \frac{2}{3}$.

Er b negativ, faar man

$$xy = 0 \text{ og } 2y^2 - 3x^2 = \frac{x}{2} + y\sqrt{-b},$$

hvoraf enten $y = 0$ og $x = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{cases}$

eller $x = 0$ og $y = \begin{cases} 0 \\ \frac{\sqrt{-b}}{2}. \end{cases}$

2. Bevis (lettest ved Induktion), at Kvadratet af Summen af de n første Tal i Talrækken er lig Summen af Tallenes Kuber.

Opløsning. $1^2 = 1^3$, $(1 + 2)^2 = 9 = 1^3 + 2^3$, $(1 + 2 + 3)^2 = 36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ o. s. v. Antages nu $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, faas $[1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)]^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^2 + 2(n + 1)(1 + 2 + \ldots + n)$,

men $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$,

altsaa $[1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)]^2$
$= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3$.

Sætningens Almengyldighed er dermed bevist.

3. Bevis, at $x^7 - x$, hvor x er et vilkaarligt helt Tal, er delelig med 42.

Opløsning. $x^7 - x = x(x^6 - 1)$ ses let at være delelig med 2, 3 og, if. Fermats Sætning, med 7, altsaa med $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Beregningsopgave.

I et Trapez ere de ikke parallele Sider (a og b), den Linie (l), der forbinder disse Siders Midtpunkter, og den Linie (m), der forbinder Midtpunkterne af de parallele Sider, givne saaledes:

$a = 22{,}3607$; $b = 14{,}1421$; $l = 31{,}6228$; $m = 17{,}3205$.

Beregn Længderne af de parallele Sider og Diagonalerne samt Trapezets Vinkler og Areal.

Opløsning. Trapezet være ABCD, $AB = b$, $CD = a$, F og G Midtpunkterne henholdsvis af BC og AD, altsaa $FG = m$. Kaldes BC x og AD y, har man

$$x + y = 2l. \qquad (1)$$

Trækkes gjennem F Linier FH og FK parallele med henholdsvis BA og CD, dannes en Trekant FHK, hvori FG er Median, og hvis Side $HK = y - x$. Man har da

$$a^2 + b^2 = \frac{(y - x)^2}{2} + 2m^2,$$

hvoraf

$$y - x = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}. \qquad (2)$$

Af (1) og (2) faas

$$y = l + \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}$$

$$x = l - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}.$$

Kaldes $\angle H = \angle A$ v og $\angle K = \angle D$ u, er

$$\cos v = \frac{(y - x)^2 + b^2 - a^2}{2b\,(y - x)} = \frac{a^2 + 3b^2 - 4m^2}{2b\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}},$$

$$\cos u = \frac{(y - x)^2 + a^2 - b^2}{2a\,(y - x)} = \frac{3a^2 + b^2 - 4m^2}{2a\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}}.$$

Dernæst faas af Trekant BAD

$$\text{Diagonalen } BD = \sqrt{b^2 + y^2 - 2by\cos v},$$

og af Trekant CAD

$$\text{Diagonalen } CA = \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay\cos u}.$$

Endelig er Arealet

$$T = \frac{1}{2}(x + y)\,h = l\,b\sin v.$$

I disse Udtryk skulle nu de opgivne Talværdier indsættes. Om disse er der at bemærke, at de med Fejlgrænsen $\frac{1}{10^4}$ en Værdierne af henholdsvis $10\sqrt{5}$, $10\sqrt{2}$, $10\sqrt{10}$, $10\sqrt{3}$, kvilket kan ses af en Tabel over Kvadratrødders Tilnærmelsesværdier.

Ved da at sætte $a = 10\sqrt{5}$, $b = 10\sqrt{2}$, $l = 10\sqrt{10}$ og $m = 10\sqrt{3}$ faas nedenstaaende Resultater, der ikke fuldt stemme med dem, man vil faa ved at indsætte de opgivne Decimalbrøker og benytte 5-cifrede Logarithmer, men dog i hvert Fald kun afvige derfra i tredje Decimal og i Sekunderne:

$$\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2} = 10\sqrt{2},$$

$$y = 10\sqrt{10} + 5\sqrt{2} = 38{,}694.$$

$$x = 10\sqrt{10} - 5\sqrt{2} = 24{,}552.$$

$$\cos v = -\frac{1}{4},\ v = 104^0\ 28'\ 39''.$$

$$\cos u = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},\ u = 37^0\ 45'\ 42''.$$

$$BD = 10\sqrt{13 + 3\sqrt{5}} = 44{,}394.$$

$$CA = 10\sqrt{13 - 3\sqrt{5}} = 25{,}084.$$

$$T = 250\sqrt{3} = 433{,}01.$$

Projektionstegning.

En Kugle, der ligger paa den vandrette Billedplan, foran den lodrette, omskrives med en Cylinderflade, hvis Frembringere ere parallele med den lodrette Billedplan og danne en Vinkel paa 36^0 med den vandrette Plan. Bestem Cylinderfladens Røringslinie med Kuglen samt dens Skæring med den vandrette Plan og med den med denne parallele Tangentplan til Kuglen. Cylinderfladen skal ikke fortsættes ud over disse to Planer.

Opgaver til Løsning.

1. Om ett tal x är aritmetiskt medium mellan y och z samt y är harmoniskt medium mellan x och z, så är z geometriskt medium mellan x och y.

(J. R. Åkerlund).

2. Sök de x-värden, som satisfiera eqvationen
$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$

(Theodor Ney).

3. Hvormange forskjellige Trekanter gives der, i hvilke alle Siderne ere hele Fod og ingen Side er over n Fod?

(Ejnar Hertzsprung).

4. I en Trekant, hvis Sider ere a, b og c, er indskreven en Cirkel, i denne en Trekant, i denne atter en Cirkel, o. s. v. i det uendelige, saaledes at Siderne i alle Trekanterne ere parallele. Find Siderne i den først indskrevne Trekant, og Summen af alle Trekanternes Arealer.

(J. C. Carlsen).

5. Find Grænseværdien af

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots$$

(Samme).

6. α er et komplex Tal; for hvilke Værdier af x vil Udtrykket $\frac{\alpha - ix}{\alpha + ix}$ være rent imaginært.

(C. Juel).

7. Et Tal med (4n + 1) Ciffre (n ikke delelig med 3) har det miderste Ciffer z, medens Cifrene fra z mod højre ere xy xy..., fra z mod venstre yx yx ... Bestem x, y og z saaledes, at Tallet er deleligt med 8, 9 og 11 og find dernæst, hvilke Rester det kan give ved Division med 7.

(P. T. Foldberg).

8. I et givet Punkt M af et Keglesnit trækkes Tangent og Normal og i Normalens andet Skæringspunkt N med Keglesnittet trækkes en Tangent, der skærer den første Tangent i P. Gjennem P trækkes en vilkaarlig Linie, skærende Keglesnittet i Q og R. Søg det geometriske Sted for Centrum af Trekant MQR's indskrevne Cirkel.

(Samme).

Definition imod Vedtægt.

(Af Chr. Hansen.)

Skjønt det hører til Algebraens Væsen og Methode at holde fast ved enhver Definition, indtil man har draget alle dens Konsekvenser, hvorved ofte nye algebraiske Størrelser fremstaa, og derefter udvide Definitionen, hvor disse nye Størrelser give Anledning dertil, har man dog i et enkelt Afsnit gjort et Brud paa denne Methode ved kort efter en Definition uden tilstrækkelig Grund at opstille en Vedtægt, der forplumrer Definitionen, og dertil knytte en anden Vedtægt, der er lige saa vilkaarlig som den første.

I alle Lærebøger defineres $\sqrt{a^2}$ som et Tal, hvis Kvadrat er a^2, og da dette Tal lige saa godt kan være $-a$ som $+a$, er altsaa Definitionens første logiske Konsekvens, at en Kvadratrod har to Værdier. Ikke des mindre ere de fleste Forfattere i al Stilhed blevne enige om at kvæle denne Definition i Fødselen ved at »vedtage«, at Rodtegnet kun skal betegne Kvadratrodens ene Værdi og $(a^2)^{\frac{1}{2}}$ begge Værdier, d. e. $\pm a$. Nogle indtage en mere eller mindre tvetydig Holdning. I Ramus's elementære Algebra Side 47 L. 11—13 f. n. loves f. Ex., at det vil »blive bevist senere, at $\sqrt[n]{a}$ har n Værdier«, men inden dette Løfte opfyldes, bliver det paa Side 50 »vedtaget«, at $\sqrt[n]{a}$ kun har 1 Værdi, og derefter bliver det paa Side 152—153 bevist, at $a^{\frac{1}{n}}$ har n Værdier. I samme Forfatters Algebra og Funktionslære derimod bliver det paa Side 9 L. 7 f. n. godtgjort, at $\sqrt[n]{a}$ har n Værdier, og dog ser man i samme Bog paa Side 97 den ulykkelige $\sqrt[n]{a}$ vedtaget som en entydig Betegnelse og $a^{\frac{1}{n}}$ som en ntydig. I Steens rene Mathematik 3dje Udgave Side 194 siges L. 3 f. o., at $b^{\frac{1}{n}}$ har n Værdier og L. 7—8 f. n., at det samme gjælder om $\sqrt[n]{a^n}$.

Vedtægten

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = \pm a$$

er som sagt en ny Vilkaarlighed; thi dels er den (se Tidsskrift for Mathematik 1877 Side 150 L. 3—21 f. o.) ikke i Overensstemmelse med $(a^m)^n = a^{mn}$, som udvidet til brudne Exponenter kun giver

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = a,$$

og dels er Ligningen

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}},$$

naar $\frac{n}{m}$ er et helt Tal, en ufuldstændig Ligning, hvis venstre Side i Følge Rodens Definition er mtydig, medens højre Side i Følge Potensens Definition er entydig. Simpelt og theoretisk naturligt turde det være (se Mundts Algebra II Side 43 L. 4—9 og Side 47 L. 1—3) at lade Rodens Definition bestaa urokket og derimod i Overensstemmelse med sidste Ligning at definere det nye Begreb $a^{\frac{n}{m}}$, hvor $\frac{n}{m}$ er en Brøk, som den saakaldte principale Værdi af $\sqrt[m]{a^n}$; derved gjøres intet Brud paa Rodens af dens Definition følgende Flertydighed og heller intet Brud paa Potensens af dennes Grunddefinition følgende Entydighed. Dog denne slagne Vej have jo de fleste Forfattere ikke fundet følgeværdig men have vedtaget, at venstre Side af Ligningen

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

skal være en entydig Betegnelse men højre Side en entydig eller mtydig, alt eftersom $\frac{n}{m}$ er hel eller bruden. Om der er kommet andet end unaturlige og uskjønne Resultater ud af disse Vedtægter samt Uklarheder og Misforstaaelser derved, at de ofte ikke konsekvent overholdes, veed jeg ikke, men tror ofte at have set Exempler paa det modsatte. Som et saadant Exempel skal jeg anføre den anden Opgave i Algebra til almindelig Forberedelsesexamen i Sommeren 1889.

Opgaven lyder: Find x af Ligningen

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b;$$

specielt antages $a = b$. Omformes Ligningen til

$$b + \sqrt{x - b^2} = a - \sqrt{x - a^2},$$

og ophøjes til anden Potens, faas

$$x + 2b\sqrt{x - b^2} = x - 2a\sqrt{x - a^2}.$$

Denne giver først

$$x = \infty \qquad (1)$$

og dernæst

$$b\sqrt{x - b^2} = -a\sqrt{x - a^2},$$

$$b^2(x - b^2) = a^2(x - a^2),$$

hvoraf faas

$$x = \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} = \begin{cases} a^2 + b^2, \text{ naar ikke } a^2 = b^2, & (2a) \\ \text{ubestemt, naar } a^2 = b^2, & (2b) \end{cases}$$

Indsættes nu Opløsningen (2a) i den givne Ligning, faar man

$$\sqrt{b^2} + \sqrt{a^2} = a - b,$$

som er rigtig, naar den første Kvadratrods negative Værdi kombineres med den sidstes positive. Ligeledes vil Opløsningen (1) tilfredsstille Ligningen, naar man kombinerer de Værdier af Kvadratrødderne med hinanden, som have modsatte Fortegn, hvilket man ser enten ved umiddelbar Indsættelse eller ved først at dividere med $\sqrt{x}$.

Sættes nu $a = b$, da bliver Ligningen til

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - a^2} = 0,$$

som, naar atter Kvadratrøddernes modsatte Værdier kombineres med hinanden, er identisk og altsaa i Overensstemmelse med (2b) tilfredsstilles af enhver Værdi af x, altsaa ogsaa af (2a), som for $a - b$ bliver $x = 2a^2$, medens Ligningen ved Kombination af Kvadratrøddernes sammenfaldende Værdier kun tilfredsstilles af en enkelt af de i (2b) indeholdte uendelig mange Opløsninger, nemlig af $x = a^2$.

Der er altsaa, naar man holder sig trofast til Kvadratrodens D e f i n i t i o n, ingen Disharmoni mellem Opgaven og dens

Resultater, ikke en Gang i det specielle Tilfælde a = b. Men følger man den imod Definitionen utro Vedtægt, at $\sqrt{}$ kun har én Værdi, nemlig den positive, da faar man gjort tre interessante Opdagelser, nemlig

1) at man selv med den punktligste Lydighed overfor Vedtægten ikke formaar at opfylde Befalingen »find x af Ligningen«, fordi denne ikke tilfredsstilles af nogen af de fundne almindelige Opløsninger, saa at disse altsaa ikke ere Opløsninger eller ere »fremmede« Opløsninger,

2) at Opgaven kun i det specielle Tilfælde a = b har en Opløsning,

3) og at denne ikke er indeholdt i den almindelige Opløsning (2a), hvormed den kun stemmer, naar b = o (= a).

Naar et algebraisk Begreb er ens betegnet og ens defineret i alle Lærebøger, skulde det synes umuligt, at en Opgave, hvori den paagjældende Begrebsbetegnelse forekommer, kan give Anledning til to forskjellige Forstaaelser af Betegnelsen og derved til to saa forskjellige Besvarelser af Opgaven som de ovenfor fremsatte; dog ikke blot mulig men uundgaaelig bliver slig Meningsforskjel, naar en Definition og en Vedtægt strides om Begrebet og nogle Forfattere holde med Definitionen, andre med Vedtægten og de øvrige med begge. Lad os f. Ex. sammenholde to Forfattere som Ramus og Julius Petersen, der begge høre til vort Aarhundredes mest ansete her i Landet. Skjønt Ramus, som ovenfor anført paa enkelte Steder røber en lidt tvetydig Holdning, holder han dog strængt paa Vedtægten i Afsnittet om Opløsning af Ligninger, hvori Kvadratrodstegn forekomme, idet han i sin elem. Alg. Side 147 L. 2—3 f. n. udtrykkeligt siger (— med Tilbagepegning paa Vedtægten —), at saadanne Kvadratrødder stedse ere at regne positive, og paa Side 148 i Overensstemmelse hermed hævder, at de Opløsninger, der ikke tilfredsstille Ligningen under den nævnte Forudsætning, ere »fremmede», og at »Ligningen vil i Følge sin Form være umulig« for saadanne Opløsningers Vedkommende. Stik modsat gaar det med

Jul. Petersen; han er ikke tvetydig i Begyndelsen, han bryder skarpt og klart med Definitionen, idet han i sin Arith. og Alg. II første Udg. Side 26 L. 9—11 og 1—2 f. n. siger: »Man har vedtaget at benytte brudne Exponenter, naar man taler om begge Rodens Værdier, medens man, naar man benytter Rodtegn, kun mener den ene Værdi. Man maa altsaa, naar man benytter Rodtegn og mener begge Værdier, sætte dobbelt Fortegn for Rodstørrelsen«. Efter denne rene og klare Besked skulde man vente, at han i Henseende til Opløsning af Ligninger, hvori Rodtegn findes, maatte stemme med Ramus; men tvært imod her bryder han med Vedtægten og vender tilbage til Definitionen, idet han Side 46 siger: »Af det Udviklede følger, at det er naturligt at betragte ethvert Rodtegn (hvorunder den Ubekjendte findes) i en Ligning, som om det havde begge Fortegn, selv om man kun skriver ét«. — Altsaa skjønt et Kvadratrodstegn er ens defineret hos alle Forfattere, ere dog vore mest ansete Mathematikere i det 19de Aarhundrede ikke enige om, hvilken Betydning der skal tillægges et Kvadratrodstegn, naar det forekommer i en til Opløsning forelagt Ligning og den Ubekjendte findes derunder. Det har man opnaaet ved at give Definitionen en Vedtægt til Ledsager og Medbejler.

Om Konstruktion af anamorfotiske Billeder.

(Af C. Juel.)

Ved Speiling i et krumt Speil vil et Billede som bekjendt blive mere eller mindre fortrukket. Ønsker man en Tegning, hvis Speilbillede skal være et forelagt (sædvanligt) Billede, maa den konstrueres efter Speilets særegne Form, og den kaldes da sædvanligvis et anamorfotisk Billede.

Holder man sig til en speilende Flade, der er en Omdrejningsflade, samt til et Øiepunkt Ø, der ligger i Axen, er

det i alle Tilfælde ret nemt ved Konstruktioner, der holde sig til samme Plan, at konstruere et anamorfotisk Billede. Man behøver nemlig kun at begynde med det Speilbillede, man ønsker at faa at sé, gjennem hvert Punkt M af dette at drage Synsstraalen, finde dennes Skæringspunkt med den speilende Flade, og endelig bestemme Skæringspunktet M_1 mellem den tilbagekastede Straale og Billedplanen. Den af Punkterne M_1 dannede Figur vil da være det søgte anamorfotiske Billede. Da den indfaldende og den tilbagekastede Straale ligge i Plan med Axen, kunne alle disse Planer dreies ind i en fast Tegneplan. Det maa dog bemærkes, at naar Fladen kun forudsættes at være speilende paa sin ene Side, er det ikke sikkert, at hele Figuren (M_1) vil give et virkeligt Speilbillede.

I enkelte Tilfælde er det dog muligt at give en simplere Konstruktion; vi ville her nærmere betragte et cylindrisk og et kegleformet Speil samt yderligere tænke os, at Billedet skal ligge i en Plan π, der staar vinkelret paa Fladens Axe i et Punkt O. Her findes der en meget simpel geometrisk Forbindelse mellem Original og Speilbillede. En Benyttelse af denne til Udledelse af nye geometriske Smaasætninger vil dog ikke give noget nævneværdigt Udbytte; den skal derfor her kun bruges til at udføre Konstruktionen saa praktisk som mulig.

Vi tænke os altsaa en lodret Omdreiningscylinder (eller en Del af samme), hvis indre Flade er speilende, samt et Øiepunkt Ø i Axen, og ville konstruere et anamorfotisk Billede i Planen π vinkelret paa Axen. Et Punkt M og dets Speilbillede M_1 ville da ligge ud i ret Linie med Punktet O og tillige ligge symmetrisk med Hensyn til en Cylinderfrembringer. Man vil som en Følge deraf have

$$OM + OM_1 = 2a,$$

idet a er Cylindrens Radius.

Bestemmes paa Linien MO et Punkt M_2 ved $OM_2 = -OM_1$, bliver derfor $MM_2 = 2a$. Da nu Speilbilledet af M_1 er M, vil Speilbilledet af M_2 være et Punkt, der ligger symmetrisk til

M med Hensyn til O; Speilbilledet af den af Punkterne M_2 dannede Figur vil man altsaa faa ved at dreie den af Punkterne M dannede Figur 180° om O.

Da Cylindren er forudsat at være speilende paa sin indre Flade, maa det billedgivende Punkt M_2 ligge indenfor Cylindren; heraf følger, at Punktet M maa ligge indeni en Cirkelring, hvis begrænsende Cirklers Radier ere a og 2a. Man har altsaa følgende Konstruktion:

Den Figur (M), man ønsker at faa at sé som Spejlbillede, tegnes indeni en Cirkelring, hvis begrænsende Cirklers Radier ere a og 2a, medens Centret er O. Fra hvert Punkt M af Figuren drages en ret Linie MO og paa denne afsættes fra M ind mod O Stykket $MM_2 = 2a$. Den af Punkterne M_2 dannede Figur vil være det søgte anamorfotiske Billede. Speilbilledet vil blive den oprindelige Tegning drejet 180° om O.

Hvorledes man skal bære sig ad, naar Speilet kun er en Del af en Cylinder, ses let.

Vi ville nu gaa over til at betragte et Keglespeil, hvis ydre Flade er speilende, og strax antage Øiet uendelig fjernt i Axens Retning. Det vil da vise sig, at man faar en Konstruktion, der væsentlig er den samme, som den ovenstaaende saafremt Tegningen atter ligger i en Plan π, der er vinkelret paa Axen i et Punkt O af denne. Lad Radius i Grundfladen være a, medens den halve Toppunktsvinkel er v; v maa her være mindre end 45°, da der ellers intet virkeligt Speilbillede kan dannes. Naar Linien ØM, der er vinkelret paa π, skærer Keglen i et Punkt N af en Frembringer, hvis Spor i π er A, da haves

$$\frac{MA}{AM_1} = \frac{MN}{M_1N} = \cos 2v.$$

Sættes $OM = r$, $OM_1 = r_1$, altsaa

$$MA = a - r, \; AM_1 = r_1 - a,$$

bliver den ovennævnte Ligning

$$\frac{a - r}{r_1 - a} = \cos 2v,$$

eller $$r_1 = a + \frac{a}{\cos 2v} - \frac{r}{\cos 2v}.$$

Bestemmes nu paa Linien OM et Punkt M_2 ved

$$OM_2 = r_2 = \frac{r_1}{\cos 2v},$$

saaledes at OM_1 og OM_2 ligge i hinandens Forlængelse, ville Afstandene r_1 og r_2 blive forbundne ved Relationen

$$r_1 + r_2 = a + \frac{a}{\cos 2v}.$$

Af denne Ligning sés det, at man af Punktet M_2 kan udlede M_1 ved en aldeles lignende Konstruktion som ovenfor ved Cylindren. Men nu erindres det, at vi her kun stille den Opgave, at Speilbilledet skal faa en rigtig Form, medens dets absolute Størrelse er mindre væsentlig. Man vil derfor begynde Konstruktionen med at tegne en Figur dannet af Punkter M_2, der er ligedannet med den, man ønsker at faa at sé, og dernæst fortsætte som ved Cylindren blot med den Forskjel, at $a + \frac{a}{\cos 2v}$ træder i Stedet for 2a.

Punkterne M ligge inden i en Cirkel med Radius a, derfor maa Punkterne M_2 ligge indeni en Cirkel med Radius $\frac{a}{\cos 2v}$; det vil ogsaa let direkte ses, at i saa Fald ligge Punkterne M_1 udenfor Keglen d. v. s. paa dennes speilende Side.

Konstruktionen bliver altsaa følgende:

En Figur af samme Form som det ønskede Speilbillede tegnes indeni en Cirkel med Radius $\frac{a}{\cos 2v}$. Fra hvert Punkt M af denne Figur drages en Linie MO til Cirklens Centrum O, og paa denne afsættes fra M ind mod O Stykket $a + \frac{a}{\cos 2v}$. Endepunkterne afdisse Stykker ville beskrive det søgte anamorfotiske Billede.

Ligedannethedsforholdet mellem Speilbilledet og den først tegnede Figur er cos 2v, og de to Figurer ere yderligere symmetrisk ligedannede med Hensyn til O.

Simplest bliver Konstruktionen, naar $v = 30^0$.

En Sætning om π.

(Af P. V. Hansen.)

En Linie AB, hvis Længde = 1, er Diameter i en Halvcirkel. AB deles i 4 ligestore Dele. Afstandene til Delingspunkterne afsættes fra B som Korder i Halvcirklen, og fra Kordernes andre Endepunkter trækkes Linier til A. Disse have da Længderne: $\sqrt{1-\frac{1}{16}}$, $\sqrt{1-\frac{1}{4}}$ og $\sqrt{1-\frac{9}{16}}$. Man halverer nu hver af AB's 4 Dele, og ved samme Fremgangsmaade som før tegnes 4 nye Korder, der udgaa fra A. Der er nu ialt 7 Linier og disse halveres ved Hjælp af en Cirkel med Diameter $\frac{1}{2}$. Herved faas 7 Linier hvis Længder ere:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4^3}}}{2},\ \frac{\sqrt{1-\frac{2^2}{4^3}}}{2},\ \frac{\sqrt{1-\frac{3^2}{4^3}}}{2} \cdots\cdots \frac{\sqrt{1-\frac{7^2}{4^3}}}{2}.$$

Derefter kunde man tegne 15 Linier, der efter at være delte af en Cirkel med Diameter $= \frac{1}{4}$, havde Længder fra $\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4^4}}}{4}$ til $\frac{\sqrt{1-\frac{15^2}{4^4}}}{4}$ o. s. fr. Er AB saaledes delt i 2^n Dele have vi $2^n - 1$ Linier, hvis Sum vi ville kalde S_n. Den tilhørende Cirkels Radius er $= \frac{1}{2^{n-1}}$. Man kan nu bevise, at Værdien af S_n er mindre end π, men kommer denne Størrelse bestandig nærmere, naar n voxer og bliver $= \pi$, naar n bliver uendelig stor.

B e v i s. I et Cirkeludsnit paa 90^0, AOB er Radien OB = 1 delt i 2^n ligestore Dele. Gjennem Delingspunkterne trækkes

Linier $\neq$ OA samt Tangenten gjennem B. Af disse Linier — regnede fra OB til Cirklen — er OA $=$ 1, Tangenten til B $=$ 0, medens de øvrige have Længder, der ved den pythagoræiske Læresætning findes at være:

$$\sqrt{1-\frac{1}{4^n}};\ \sqrt{1-\frac{2^2}{4^n}};\ \dots\dots\dots\ \sqrt{1-\frac{(2^n-1)^2}{4^n}}.$$

Trækkes Linier $\neq$ OB gjennem Skæringspunkterne, opstaar der to Sæt Rektangler, af hvilke det ene ligger helt indeni, det andet helt udenom Cirkeludsnittet. Idet alle Højderne ere $\frac{1}{2^n}$ haves:

$$\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{4^n}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{4^n}}+\dots\dots+\sqrt{1-\frac{(2^n-1)^2}{4^n}}}{2^n} > \frac{\pi}{4}$$

$$\text{og}\quad \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4^n}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{4^n}}+\dots\dots+\sqrt{1-\frac{(2^n-1)^2}{4^n}}}{2^n} < \frac{\pi}{4}.$$

Vi betragte først den af Størrelserne, der er mindre end $\frac{\pi}{4}$. Her ordnes Leddene i Tælleren saaledes, at man sætter det mellemste Led først. Det tilbageblevne er da delt i to Grupper; af disse tager man igjen de mellemste Led. Derved fremkommer 4 Grupper, af hvilke man atter tager deres mellemste Led o. s. v. Efter en Forkortning faar man da:

$$\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\sqrt{1-\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1-\frac{3^2}{4^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{4^3}}+\sqrt{1-\frac{3^2}{4^3}}+\dots+\sqrt{1-\frac{(2^n-1)^2}{4^n}}}{2^n}$$

Naar vi ved a_r forstaa Summen af Leddene $\sqrt{1-\frac{1}{4^r}}$; $\sqrt{1-\frac{3^2}{4^r}}$ o. s. v. indtil $\sqrt{1-\frac{(2^r-1)^2}{4^r}}$, kan dette skrives

$$\frac{\pi}{4} > \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}}{2}+\frac{a_4}{2^3}}{2}+\dots\dots \qquad \cfrac{\dots\dots\dots\dots}{2}+\frac{a_n}{2^{n-1}}}{2},$$

hvilket ses at være lig med $\frac{S_n}{4}$.

Forskjellen mellem de to Størrelser, der begrænse $\frac{\pi}{4}$ er $\frac{1}{2^n}$. Jo større n tages, desto mindre bliver denne Forskjel, og for $n = \infty$ er den $= 0$. Altsaa bliver $\frac{\pi}{4} =$ Kjædebrøken, naar den fortsættes i det uendelige; og hermed er Sætningen bevist.

Danske Examensopgaver.

Afgangsexamen for studerende.

Januar 1890.

(Fortsat).

Geometri.

1. En OmdrejningskeglefIades Axe gaar gjennem en Kugles Centrum. Afstanden fra dette til Keglefladens Toppunkt er lig Kuglens Diameter, og Arealet af den Del af Kuglefladen, der ligger indenfor Keglefladen er dobbelt saa stort som Arealet af den Del af Keglefladen, der ligger indenfor Kuglefladen. Find Keglefladens Toppunktsvinkel.

Opløsning. Kaldes Kuglens Radius r, Keglestubbens Højde h og Afstanden fra Centrum til Stubbens Sidelinie d, haves

$$4\pi r^2 - 2\pi r h = 2 \,.\, 2\pi d h.$$

Den halve Toppunktsvinkel være x; da er

$$d = 2r \sin x, \quad h = 2\sqrt{r^2 - 4r^2 \sin^2 x} \,.\, \cos x.$$

Indsættes disse, faar man efter nogen Reduktion

$$(1 - 4\sin^2 x)(1 - \sin^2 x)(1 + 4\sin x)^2 - 1 = 0,$$

som dels giver den ubrugelige Værdi $\sin x = 0$, dels en 5te Grads Ligning til Bestemmelse af $\sin x$.

Vi have imidlertid bragt i Erfaring, at der i den opgivne Text var indløbet en Skrivefejl, idet der skulde staa »... den Del af Kuglefladen, der ligger udenfor Keglefladen ...«. I saa Fald bliver Løsningen

$$2\pi r h = 2 \,.\, 2\pi d h,$$

$$\sin x = \frac{1}{4}, \quad 2x = 28^{0}57'18''.$$

2. Gjennem Koordinatsystemets Begyndelsespunkt O gaa to faste Linier, der skæres af en tredje Linie i A og B, saaledes at Arealet af Trekanten AOB er konstant lig k. Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af AB og søg Stedets Skæringspunkter med de to faste Linier. Vis endvidere, at AB rører Kurven.

Opløsning. Ere de faste Liniers Ligninger

$$y = \alpha x \text{ og } y = \beta x,$$

kan A f. Ex. have Koordinaterne $(x_1, \alpha x_1)$, B $(x_2, \beta x_2)$, saaledes at

$$(\alpha - \beta)\, x_1 x_2 = 2k.$$

Koordinaterne (x,y) til Midtpunktet M af AB ere da bestemte ved

$$x_1 + x_2 = 2x$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 2y.$$

Ved Elimination af x_1 og x_2 faas

$$2\,(y - \beta x)\,(\alpha x - y) = k\,(\alpha - \beta)$$

som Ligning for det geometriske Sted for M. Da Ligningen er af anden Grad, bliver Stedet et Keglesnit. Da hver af de givne rette Linier skærer dette i 2 uendelig fjerne Punkter (i Skæringspunkternes Abscissers Bestemmelsesligning faar x^2 og x Koefficienten O), er Stedet en Hyperbel med disse til Asymptoter. Ifølge den bekjendte Sætning, at der af enhver ret Linie afskæres to ligestore Stykker mellem Hyperblen og dens Asymptoter, vil AB røre Kurven i M.

3. Tegn en Cirkel med given Radius, som gaar gjennem et givet Punkt, og som af en given Linie afskærer en Korde med given Længde.

Opløsning. Man tegner en Cirkel med den givne Radius, der afskærer den givne Korde af Linien, og forskyder derefter denne Cirkel, saaledes at dens Centrum bevæger sig parallelt

med Linien, indtil den gaar gjennem det givne Punkt. De nødvendige Konstruktioner ere meget simple. 4, 3, 2, 1 eller 0 Løsninger.

Adgangsprøve til Officersskolens næstældste Klasse.

Marts 1890.

Almindelig Prøve.

1ste Opgave.

1. Find x af Ligningen $2\sqrt{5+x} + \sqrt{2-x} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Opgaven løses dels ved at gjøre Ligningen rational og prøve de fundne Værdier, dels ved at indføre nye Ubekjendte.

Opløsning. a) Ligningen rationaliseres til

$$25x^2 + (48 - 24\sqrt{10})\,x = 0,$$

der giver $\quad x = 0 \;\text{ og }\; x = \dfrac{24\sqrt{10} - 48}{25}$.

Den første Værdi ses let at tilfredsstille Ligningen. Indsættelse af den anden giver

$$\frac{2}{5}\sqrt{77 + 24\sqrt{10}} + \frac{1}{5}\sqrt{98 - 24\sqrt{10}} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2},$$

eller idet venstre Side gøres enkelt irrational, Identiteten

$$\frac{2}{5}(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) + \frac{1}{5}(4\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) = 2\sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

Begge Værdier tilfredsstille altsaa den forelagte Ligning.

b) Sættes $(5 + x)^{\frac{1}{2}} = y$, $(2 - x)^{\frac{1}{2}} = z$, ville de søgte x-Værdier være indbefattede i dem, der faas af Ligningerne

$$2y + z = 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$$
$$y^2 = 5 + x$$
$$z^2 = 2 - x.$$

De to sidste give $\qquad y^2 + z^2 = 7$,

som sammenholdt med den første giver

$$5y^2 - 4(2\sqrt{5} + \sqrt{2})\,y + 15 + 4\sqrt{10} = 0,$$

hvoraf de to positive Værdier $y = \sqrt{5}$ og $y = \frac{3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{5}$,

og derefter de to positive Værdier $z = \sqrt{2}$ og $z = \frac{4\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{5}$,

og endelig $x = 0$ cg $x = \frac{24\sqrt{10} - 48}{25}$,

hvilke Værdier altsaa begge tilfredsstille den opgivne Ligning.

2. Vinklen ACB er ret. $AC = 3$, $BC = 5$. Punkterne A og B bevæge sig med jævn Hastighed paa Vinklens Ben imod C. Efter 2 Sekunders Forløb er Afstanden imellem A og B $5\sqrt{2}$ og efter 4 Sekunders Forløb $13\sqrt{2}$. Med hvilke Hastigheder bevæge Punkterne sig? Efter hvor mange Sekunders Forløb vil deres Afstand være et Minimum og hvor stort er dette?

Opløsning. Lad A bevæge sig med Hastigheden u og efter 2 Sekunders Forløb være i A_1, efter 4 i A_2, B have Hastigheden v og til de samme Tidspunkter være henholdsvis i B_1 og B_2. Da er

$$CA_1 = \pm(3 - 2u), \quad CA_2 = \pm(3 - 4u),$$
$$CB_1 = \pm(5 - 2v), \quad CB_2 = \pm(5 - 4v),$$

+ el. —, eftersom Punkterne ere paa samme eller modsat Side af C som Udgangspunkterne. Man har da

$$A_1B_1^2 = 34 - 12u - 20v + 4u^2 + 4v^2 = 50,$$
$$A_2B_2^2 = 34 - 24u - 40v + 16u^2 + 16v^2 = 338.$$

Heraf dannes let Ligningerne

$$u^2 + v^2 = 34,$$
$$3u + 5v = 30,$$

der give $u = \left| \begin{matrix} 5 \\ \frac{5}{17} \end{matrix} \right.$ og $v = \left| \begin{matrix} 3 \\ \frac{99}{17} \end{matrix} \right.$.

Efter t Sekunders Forløb ere Punkternes Afstande fra C henholdsvis $\pm(3 - ut)$ og $\pm(5 - vt)$. Deres indbyrdes Afstand d er da bestemt ved

$$d^2 = 34 - 60t + 34t^2,$$

hvoraf $$t = \frac{30 \pm \sqrt{34d^2 - 256}}{34},$$

saa at man maa have $34d^2 \geqq 256$.

d's Minimumsværdi bliver da $\sqrt{\frac{128}{17}}$; den indtræffer efter $\frac{15}{17}$ Sekunds Forløb.

2den Opgave.

1. Højden BD = h i △ ABC er delt ved Punkterne E og F (E nærmest B) i 3 Dele saaledes, at $\frac{BE}{n} = \frac{EF}{m} = \frac{FD}{p}$. Linier igjennem E og F parallele med AC dele Trekanten i 3 Dele, af hvilke den midterste har Arealet Q. Man skal finde Længden af Parallelerne og Arealet af △ ABC.

Opløsning. Kaldes Parallelerne x og y, har man

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n+m} = \frac{x+y}{2n+m} = \frac{2Q}{EF} = \frac{2Q(n+m+p)}{mh},$$

hvoraf $$x = \frac{2Qn(n+m+p)}{mh}, \quad y = \frac{2Q(n+m)(n+m+p)}{mh}.$$

Arealet af △ ABC kaldes T, af den lille Trekant med B til Toppunkt, x til Grundlinie, S. Da er

$$\frac{S}{n^2} = \frac{S+Q}{(n+m)^2} = \frac{T}{(n+m+p)^2} = \frac{Q}{(n+m)^2 - n^2},$$

hvoraf $$T = \frac{Q(n+m+p)^2}{m(2n+m)}.$$

2. O' er Centrum for den i △ ABC indskrevne Cirkel. Linien CO' skærer Trekantens omskrevne Cirkel i C og D. Vis at DO' = DA = DB. — Man skal dernæst konstruere en retvinklet Trekant, naar man kjender Radius R til den omskrevne Cirkel og Afstanden d imellem denne Cirkels Centrum O og Centret O' til den i Trekanten indskrevne Cirkel. Rigtigheden af Konstruktionen bevises. Betingelserne for Opgavens Mulighed angives.

Opløsning. a) D er ◡ AB's Midtpunkt, følgelig DA = DB.

$$\angle DAB = \tfrac{1}{2} \smile DB = \frac{C}{2}, \quad \angle DAO' = \frac{C+A}{2} = \angle DO'A,$$

følgelig $$DO' = DA = DB.$$

b) Den omskrevne Cirkel tegnes og i den en Diameter AOB, som da er Hypotenuse i den søgte Trekant. Centrum O' i den indskrevne Cirkel bestemmes som Skæringspunkt mellem en Cirkel om O som Centrum med Radius OO' og en Cirkel med Midtpunktet D af Buen AB som Centrum og med Radius AD. DO' skærer den omskrevne Cirkel i C.

Konstruktionens Rigtighed følger af det under a) beviste.

Betingelserne for Muligheden er, at OO' er mindre end R og større end Pilen for den Bue AB, der har D til Centrum. De fremkomne Trekanter ere kongruente, saa at Opgaven kun har 1 Løsning.

Tillægsprøve.

1ste Opgave.

1. I Tetraedret B — ADC ere de modstaaende Kanter AB og CD hver lig med a, de 4 andre Kanter hver lig med b. E er Midtpunktet i AB, og F Midtpunktet i CD. Vis at EF gaar igjennem Centret til den Tetraedret omskrevne Kugle. Find Udtryk for Radierne til den omskrevne og indskrevne Kugle samt for Tetraedrets Volumen.

Opløsning. Da BF og AF ere vinkelrette paa DC, er Planen BFA vinkelret paa Midten af DC. Ligeledes er Planen DEC vinkelret paa Midten af AB. Følgelig ligger den omskrevne Kugles Centrum O i EF.

Det ses let, at O ogsaa bliver Centrum for den indskrevne Kugle, idet Afstanden fra det til enhver af Sidefladerne bliver Kathete i en retvinklet Trekant, hvis anden Kathete er Radius ϱ i Sidetrekantens omskrevne Cirkel, og hvis Hypotenuse er den omskrevne Kugles Radius R. Vi ville først bestemme den indskrevne Kugles Radius r og fælde derfor den vinkelrette OM paa Sidefladen ADC. Af

$$\triangle MOF \sim \triangle EAF$$

faas
$$\frac{MO}{\frac{1}{2}a} = \frac{MF}{EF},$$

men $MF = h - \varrho = h - \frac{b^2}{2h}$, hvor $h = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ er Trekant ADC's Højde, og $EF = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$; indsættes disse Udtryk, faar man
$$MO = r = \frac{a\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{4\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Dernæst er
$$R^2 = OF^2 + DF^2 = \frac{EF^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + 2b^2}{8},$$
altsaa
$$R = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 + 4b^2}.$$

Endelig er Tetraedrets Volumen
$$V = \frac{1}{3}r.2ah = \frac{a^2}{12}\sqrt{4b^2 - 2a^2}.$$

2. Tangenterne til Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$ ere Polarer for Parablen $y^2 = px$. Find Stedet for deres Poler.

Opløsning. Er Cirkeltangenten
$$x_1 x + y_1 y = r^2,$$
hvor
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$
Parabelpolar for Punktet (ξ, η), har man
$$\frac{p}{x_1} = \frac{-2\eta}{y_1} = \frac{-p\xi}{r^2}$$
$$= \frac{\pm\sqrt{p^2 + 4\eta^2}}{r},$$
saa at Koordinaterne til Polen tilfredsstille Ligningen
$$\frac{\xi^2}{r^2} - \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{2}p\right)^2} = 1.$$

Stedet for Polerne er altsaa en Hyperbel med Cirkeldiameteren paa Parabelaxen til første Axe og med Asymptoter parallele med Tangenterne til Parablen i de Punkter, hvori den skæres af de med Axen parallele Tangenter til Cirklen.

2den Opgave.

1. I Ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ er M (x_1, y_1) et vilkaarligt Punkt, O Centrum, ON den med OM konjugerede Halvdiameter. Fra M og N er fældet Vinkelrette paa Diametren $y = x\,tg\alpha$, deres Fodpunkter ere henholdsvis D og E. — Find $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2$, Arealet af $\triangle$ MON. Vis at ON er Mellemproportional imellem Brændstraalerne til M, at $\overline{MD}^2 + \overline{NE}^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$.

Opløsning. Koordinaterne (x_2, y_2) til N findes af Ligningerne

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ og } y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x \text{ at være}$$

$$x_2 = \pm\frac{a}{b}y_1,\ y_2 = \mp\frac{b}{a}x_1.$$

$$OM^2 + ON^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = a^2 + b^2.$$

$$MON = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}ab.$$

$$FM\,.\,F_1M = a^2 - e^2x_1^2,\ ON^2 = \frac{a^2}{b^2}y_1^2 + \frac{b^2}{a^2}x_1^2$$

$$= a^2 - x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}x_1^2 = a^2 - e^2x_1^2,$$

følgelig $$FM\,.\,F_1M = ON^2.$$

Ligningen for Diameteren $y = x\,tg\alpha$ paa Normalform er

$$\pm(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0,$$

altsaa

$$MD^2 + NE^2 = (y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha)^2 + \left(\frac{b}{a}x_1\cos\alpha + \frac{a}{b}y_1\sin\alpha\right)^2$$

$$= b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha.$$

2. Paa en ret Linie ligge Punkterne A, B, C, D i denne Orden. Punktet M ligger udenfor Linien saaledes, at $\angle$ MBD er 2 Gange og $\angle$ MCD er 3 Gange saa stor som $\angle$ MAD. — For AB = a og BC = b skal man bestemme Sider og Vinkler i Trekanterne AMB og BMC samt M's Afstand fra AD. Hvilken Betingelse maa a og b opfylde, for at Opgaven kan være mulig?

Opløsning. Er $\angle MAD = x$, $\angle MBD = 2x$, $\angle MCD = 3x$, bliver hver af Vinklerne CMB og BMA lig x, altsaa

$$BM = a,$$

hvorefter
$$\frac{\sin x}{b} = \frac{\sin 3x}{a} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{a},$$

som dels giver $\sin x = 0$ (ubrugelig), dels

$$\frac{a}{b} = 3 - 4\sin^2 x,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{a}{b}}.$$

Da sinx skal være reel og mindre end 1, maa man have

$$0 < 3 - \frac{a}{b} < 4,$$

hvoraf
$$3 > \frac{a}{b} > -1.$$

Da a og b ere positive Størrelser, er den eneste Betingelse for Opgavens Mulighed altsaa, at deres Forhold er mindre end 3.

Til Bestemmelse af Siderne haves

$$AM = 2a\cos x = a\sqrt{1 + \frac{a}{b}}.$$

$$CM = \frac{b}{a} . AM = b\sqrt{1 + \frac{a}{b}}.$$

Afstanden h fra M til AD er bestemt ved

$$h = AM\sin x = \frac{a}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(3 - \frac{a}{b}\right)}.$$

Løste Opgaver.

1. Om ett tal x är aritmetiskt medium mellan y och z samt y är harmoniskt medium mellan x och z, så är z geometriskt medium mellan x och y.

Opløsning. Man har

$$x = \frac{y+z}{2} \text{ og } y = \frac{2xz}{x+z},$$

hvoraf henholdsvis $2 = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}$ og $2 = \frac{y}{x} + \frac{y}{z}$,

altsaa $\frac{y}{z} = \frac{z}{x}$.

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af P. R. Petersen.)

2. Sök de x-värden, som satisfiera eqvationen
$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$

Opløsning.

$$\begin{aligned} O &= \sin x - \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^3 x + \sin^4 x - \cos^4 x \\ &= \sin x - \cos x + 2(\sin^2 x - \cos^2 x) + \sin^3 x - \cos^3 x \\ &= (\sin x - \cos x)\,[1 + 2(\sin x + \cos x) + (1 + \sin x \cos x)] \\ &= (\sin x - \cos x)\left[1 + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right] \\ &= (\sin x - \cos x)\left[\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\right], \end{aligned}$$

altsaa $\sin x - \cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} + p\pi,$

eller $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} = 0,$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ (ikke brugelig)} \end{cases},$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2p\pi \text{ og } \pi + 2p\pi.$$

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af C. E. Schlichtkrull.)

3. Hvormange forskjellige Trekanter gives der, i hvilke alle Siderne ere hele Fod og ingen Side er over n Fod?

Opløsning. Er den ene Side p, de to andre Sider ikke større end p, kunne disse være

den ene:	den anden:	
p	p, p — 1, p — 2, . . . 1	p Trekanter,
p — 1	p — 1, p — 2, p — 3, . . . 2	p — 2 —
p — 2	p — 2, p — 3, p — 4, . . . 3	p — 4 —
. . .	. . . .	. . .
. . .	. . . .	. . .
$\frac{p}{2}+1$ eller $\frac{p+1}{2}$;	$\frac{p}{2}+1$, $\frac{p}{2}$ eller $\frac{p+1}{2}$; 2 eller 1	— ,

eftersom p er lige eller ulige.

Antallet af Trekanter, hvis ene Side er p, de andre ikke større end p, er altsaa

$$p \text{ lige, } \quad S_p = p + (p-2) + (p-4) + \ldots + 2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p}{2},$$

$$p \text{ ulige, } \quad S_p = p + (p-2) + (p-4) + \ldots + 1 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

Det hele Antal Trekanter bliver da

$$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n.$$

$$n \text{ lige; } S_n = 1 + (1+1) + 2^2 + (2^2+2) + 3^2 + (3^2+3) + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right)$$

$$= 2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + 1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6} + \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{n\,.\,(n+2)(2n+5)}{24},$$

$$n \text{ ulige, } S_n = S_{n-1} + s_n = \frac{(n-1)(n+1)(2(n-1)+5)}{24} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}.$$

4. I en Trekant, hvis Sider ere a, b og c, er indskreven en Cirkel, i denne en Trekant, i denne atter en Cirkel, o. s. v. i det uendelige, saaledes at Siderne i alle Trekanterne ere parallele. Find Siderne i den først indskrevne Trekant, og Summen af alle Trekanternes Arealer.

Opløsning. Siderne i den først indskrevne Trekant ere a_1, b_1 og c_1.

Denne Trekant og den givne ere ligedannede, altsaa:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{s}{s_1} = \frac{s-a}{s_1-a_1} = \frac{s-b}{s_1-b_1} = \frac{s-c}{s_1-c_1} \quad (1)$$

Trekant $A_1B_1C_1$'s omskrevne Cirkels Radius er lig ABC's indskrevne Cirkels Radius, altsaa

$$\frac{a_1b_1c_1}{4\sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\frac{a_1b_1c_1}{4} = \sqrt{\frac{s_1}{s}(s-a)(s_1-a_1)(s-b)(s_1-b_1)(s-c)(s_1-c_1)},$$

som ved Hjælp af (1) reduceres til

$$\frac{a_1b_1c_1}{4} = \sqrt{\frac{a_1}{a}\cdot\frac{a_1(s-a)^2}{a}\cdot\frac{a_1(s-b)^2}{a}\cdot\frac{a_1(s-c)^2}{a}},$$

$$\frac{b_1c_1}{4} = \frac{a_1}{a}\cdot\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{a}, \text{ hvoraf atter ved (1)}$$

$$\frac{b_1c_1}{4} = \frac{b_1}{ab}\cdot(s-a)(s-b)(s-c), \quad \text{der giver}$$

$$c_1 = \frac{4}{ab}(s-a)(s-b)(s-c),\ b_1 = \frac{4}{ac}(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$a_1 = \frac{4}{bc}(s-a)(s-b)(s-c).$$

Kaldes Trekanternes Arealer T, T_1, T_2 o. s. v., har man

$$\frac{T}{T_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{a^2b^2c^2}{4^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}$$

$$T_1 = T\cdot\frac{16(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2} = T\cdot q$$

$$T_2 = T_1\cdot q = Tq^2 \text{ o. s. v., og da } q < 1$$

$$S = \frac{T}{1-q} = \frac{a^2b^2c^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a^2b^2c^2 - 16(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}.$$

(Sophus Hansen.)

7. Et Tal med $(4n + 1)$ Cifre (n ikke delelig med 3) har det midterste Ciffer z, medens Cifrene fra z mod højre ere $xy\ xy\ldots$, fra z mod venstre $yx\ yx\ldots$ Bestem x, y og z saaledes, at Tallet er deleligt med 8, 9 og 11 og find dernæst, hvilke Rester det kan give ved Division med 7.

Opløsning. Af Deleligheden med 8, 9 og 11 faas henholdsvis

$$y + 10x + 100y \equiv 2x + 5y \equiv 0 \text{ (mod. 8)} \qquad (1),$$

$$2nx + 2ny + z \equiv 0 \text{ (mod. 9)} \qquad (2),$$

$$ny + z + nx - nx - ny = z \equiv 0 \text{ (mod. 11)} \qquad (3).$$

Af (3) faas $z = 0$, der indsat i (2) giver, idet n ikke er delelig med 3, $x + y \equiv 0$ (mod 9), altsaa $x + y = 0$, 9 eller 18. $x + y = 0$ gjør alle Cifrene til Nul; $x + y = 9$, $x = 9 - y$ giver indsat i (1) $18 + 3y \equiv 6 + y \equiv 0$ (mod 8), altsaa $y = 2$, $x = 7$; $x + y = 18$ giver $x = y = 9$, men y maa i Følge (1) være lige; $x = 7$, $y = 2$, $z = 0$ er saaledes den eneste Løsning.

Skrives Tallet under Formen $a + b \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^6 + \ldots$, ses let, at det ved Division med 7 giver Resten 0 eller 1, efter som $n = 3p \pm 1$.

(J. C. Carlsen.)

Opgaver til Løsning.

9. Find $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ af Ligningerne

$$a_1^n x_1 + a_1^{n-1} x_2 + a_1^{n-2} x_3 + \ldots . + a_1 x_n = k$$
$$a_2^n x_1 + a_2^{n-1} x_2 + a_2^{n-2} x_3 + \ldots . + a_2 x_n = k$$
$$a_3^n x_1 + a_3^{n-1} x_2 + a_3^{n-2} x_3 + \ldots . + a_3 x_n = k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n^n x_1 + a_n^{n-1} x_2 + a_n^{n-2} x_3 + \ldots . + a_n x_n = k.$$

(J. C. Carlsen.)

10. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{x^2 + bx + 1} + \sqrt{x^2 + cx + 1} = 0.$$

(A. S. Bang.)

11. Bestem de 6 Værdier af

$$(10 \pm 9\sqrt{-3})^{\frac{1}{3}}$$

(Samme.)

12. Skaf Brøken $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}}$ rational Nævner.

(Samme.)

13. Konstruer en Firkant, i hvilken et Par modstaaende Vinkler ere ligestore, af Siderne.

(Samme.)

14. I et Cylinderglas med Vægt V^{gr}, hvis indre Diameter er k^{cm} og hvis Tyngdepunkt ligger i Højden h^{cm} over Bunden, hældes Vædske af Vægtfylde d. Tyngdepunktet vil derved først synke, senere atter stige; dets laveste Stilling ønskes bestemt.

(Vilh. Madsen.)

15. Dela en qvadrat så, att delarne kunna sammanläggas till [1]) 2 qvadrater, af hvilka den ena = 2 gånger den andra — eller ock till [2]) 3 qvadrater, hvilka förhålla sig som 2 : 3 : 4.

(J. R. Åkerlund.)

Korrespondance.

Nogle indkomne Løsninger af Opgaverne 6, 7 og 8 m. m. ville blive optagne i næste Numer.

Svar til B_1 i H.

1. Findes der paa Dansk noget Værk — videnskabeligt — om Mathematikens Historie, og hvad koster det?

En fuldstændig Oversigt over Mathematikens Historie findes ikke paa Dansk. Et fremragende mathematisk-historisk Specialværk er Prof. Zeuthens »Keglesnitslæren i Oldtiden« (Pris Kr. 10). Poul La Cour: Historisk Mathematik (Pris Kr. 5,25) behandler ret omfattende Oldtidens Mathematikere.

2. Findes der nogen større plangeometrisk Lærebog, egnet til Haandbog for en Lærer?

Af mere omfattende danske Lærebøger i Plangeometri haves Ramus' og tildels Oppermanns. En fransk Elementærgeometri af Rouché og Comberousse kan anbefales som passende til det angivne Formaal.

3. Bliver der ved Bedømmelsen af Konstruktionsopgaven til alm. Forberedelsesexamen lagt Vægt paa den tekniske Udførelse.

Næppe ved Fastsættelsen af Karakteren for geometriske Opgaver. Kan derimod influere paa Ordenskarakteren.

Rettelser.

A. Nr. 1.

Side 5, L. 10 f. n.: $CP = \sqrt{m}$, læs: $CP = g\sqrt{m}$.

— L. 4 f. n.: $m = g.\frac{4}{3}$, læs $m = \frac{4}{3}$.

Side 10, L. 8 f. o.: Idet Størrelsen under Rodtegnet er $= (c^2 - 2abc)^2$, kunne Udtrykkene for Rødderne reduceres til $-\frac{bc}{c^2 - ab}$ og $-\frac{c}{a}$.

Side 10, L. 9 f. n.: Ddle, læs: Dele.

Definition imod Vedtægt.

(Af Chr. Hansen.)

(Sidste Artikel.)

Naar jeg siger, at Vedtægten

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = \pm a \qquad (1)$$

ikke er i Overensstemmelse med

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (2)$$

som udvidet til brudne Exponenter kun giver

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = a,$$

da mener jeg hermed, at, hvis man vil benytte Ligning (2) som Definitionsbasis for Begrebet $(a^2)^{\frac{1}{2}}$, d. v. s. fordre denne Lignings Bestaaen ogsaa for brudne Værdier af m og n, da faar man den Potensens Entydighed bevarende Definition (3) i Modsætning til den dens Entydighed uden theoretisk Nødvendighed ophævende Vedtægt (1), hvis Vilkaarlighed derved synes mig yderligere belyst, idet man jo ellers altid i Algebraen foretager Begrebsudvidelser saaledes, at de nye Begreber ikke afvige mere end theoretisk nødvendigt fra de tilsvarende gamle.

Benytter man, hvad naturligst er, Ligningen

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}, \qquad (4)$$

hvor $\frac{n}{m}$ er hel, som Definitionsbasis for Begrebet $a^{\frac{n}{m}}$, hvor $\frac{n}{m}$ er bruden, d. e. respekterer man denne Lignings venstre Sides af dens Definition følgende mtydighed og fordrer højre Sides af Potensens Grunddefinition følgende Entydighed for hele Exponenter bevaret for brudne, da faar man den ikke i Uoverensstemmelse med noget tidligere Begreb kommende Definition, at $a^{\frac{n}{m}}$ er, naar $\frac{n}{m}$ er bruden, den principale Værdi af $\sqrt[m]{a^n}$ lige som, naar $\frac{n}{m}$ er hel.

Men prisgiver man sig den Dobbeltvedtægt, at venstre

Side af Ligning (4) skal være en entydig Betegnelse, uagtet den forud er defineret som en mtydig, og at højre Side skal være mtydig, uagtet den hidtil, d. e. for hele Exponenter, har været entydig, da faar man selvfølgelig ingen Definition (i sædvanlig Betydning) ud af Ligningen, fordi man ved ualgebraiske Beslutninger har berøvet Ligningen dens algebraiske Definitionsevne. Ligningen giver da i sin Magtesløshed kun den Besked, at $a^{\frac{n}{m}}$ er Indbegrebet af de m Værdier, som $\sqrt[m]{a^n}$ i Følge sin Definition har men i Følge en Vedtægt ikke har, eller med andre Ord Ligningen meddeler, at den Betydning, der hidtil har været og endnu stadigt bliver ved Definition i alle Lærebøger tillagt $\sqrt[m]{a^n}$, skal overdrages til $a^{\frac{n}{m}}$, og at $\sqrt[m]{a^n}$ kun skal have Lov til at beholde sin principale Værdi tilbage.

Og dog er denne Meddelelse heller ikke til at stole paa; thi naar man skal løse en Ligning som f. Ex.

$$x + \sqrt{x - a} = \sqrt{b}, \tag{5}$$

saa skal man efter Nogles Mening betragte begge Kvadratrødderne som entydige i Følge Vedtægten og efter Andres Mening kun $\sqrt{b}$ som entydig efter Vedtægten men $\sqrt{x-a}$ som tvetydig efter Definitionen. Men i Følge Vedtægten skal man jo skrive

$$x + (x - a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}, \tag{6}$$

naar man vil have Ligningens andet Led i venstre Side forstaaet som havende to Værdier. Skriver man ikke saaledes, og vil man alligevel have Ligning (5) forstaaet som (6), da har man brudt med Vedtægten og er vendt tilbage til Definitionen. — Men hvorhen gjælder saa Vedtægten? Den gjælder saa ikke stort længere end derhen, at man f. Ex. i Stedet for

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{-1 \pm (-3)^{\frac{1}{2}}}{2}, \end{cases}$$

der respekterer Rodens Flertydighed og bevarer Potensens Entydighed, skal skrive

$$1^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \end{cases}$$

der sætter sig ud over begge Hensyn.

Hvilket Begreb man i Algebraen forbinder med dette eller hint Tegn, er naturligvis paa en vis Maade og til en vis Grad *) ligegyldigt, men det er paa ingen Maade og til ingen Grad ligegyldigt, om man tillægger Tegnet en fast eller en vilkaarligt skiftende Betydning; thi dette Sidste kan kun føre til Uklarheder og Misforstaaelser. Saaledes have de angaaende Brugen af Tegnene $\sqrt[n]{a}$ og $a^{\frac{1}{n}}$ indførte men ikke gjennemførte Vedtægter kun givet til Udbytte en Forplumring af Rodtegnets Betydning. Det er derfor ganske naturligt, at der i Maanedsskrift for den elementære Mathematik i December 1887 Side 88 er spurgt om, hvorvidt 14 er Rod i Ligningen

$$x + \sqrt{x - 5} = 11,$$

og heller ikke til at undres over, at der hertil er svaret nej i Overensstemmelse med Vedtægten og dog i samme Tidsskrift for 1889, August og September, Side 101 leveret af Ligningen

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b$$

en Opløsning, der anerkjender, at $a^2 + b^2$ er en Rod i Følge Definitionen.

Til

Redaktionen af »Nyt Tidsskrift for Mathematik«!

Jeg vilde gerne bede om Plads for nogle Bemærkninger til den Løsning og Diskussion af Ligningen

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b,$$

*) Se Slutningen af denne Artikels første Punktum.

som er fremsat i sidste Hefte af Tidsskriftet (Chr. Hansen: Definition imod Vedtægt).

Den 1ste almindelige Løsning, $x = \infty$, kan kun faas, naar man betragter den forelagte Ligning som et Grænsetilfælde, f. Eks. naar man lader α konvergere mod 1 i

$$\sqrt{\alpha x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b,$$

og det er derfor næppe berettiget at kalde den Rod i den forelagte Ligning. I al Fald kan man hverken vente eller forlange, at Eksaminander til alm. Forberedelseseksamen skulle generalisere en Opgave, der stilles dem til Løsning. Endelig er det ikke klart, hvorledes man ved umiddelbar Indsættelse i Ligningen kan se, at den tilfredsstilles af $x = \infty$, selv om Kvadratrødderne tages med modsatte Fortegn.

Den 2den almindelige Løsning, $x = a^2 + b^2$, tilfredsstiller virkelig den forelagte Ligning, naar Kvadratrødderne tages med de Fortegn, som de i Følge Vedtægt skulle have, saafremt a er positiv og b negativ. Under denne Forudsætning kan man ikke have $a = b$, og følgelig kan dette specielle Tilfælde ikke være indbefattet under det almindeligere, som giver en Løsning.

Dermed bortfalder det interessante ved de tre Opdagelser som ere gjorte Side 20. Men det er naturligvis et Spørgsmaal, om man tør forlange denne Diskussion af en »Præliminarist«.

Uden iøvrigt at gaa nærmere ind paa Sagen »Vedtægt imod Definition«, skal jeg sluttelig blot tilføje, at det formentlig kun har formel Interesse, om Entydigheden tillægges $\sqrt{a^2}$ eller $(a^2)^{\frac{1}{2}}$. Men da Kvadratrodstegnet nu én Gang er en sædvanligere Betegnelse end den brudne Eksponent, synes det mest praktisk at forlange dobbelt Fortegn foran Rodtegnet, naar der menes begge Rodens Værdier; i modsat Fald vilde f. Eks. begge Rødderne i en kvadratisk Ligning fremstilles i en Form, $a + \sqrt{b}$, som vilde være en Faldgrube for mangen

mindre tænksom Discipel og kunde forskaffe ham højst uskønne Resultater, og det vilde dog ikke være pædagogisk forsvarligt.

Helsingør Latin- og Realskole, 26. 3. 90.

Chr. Krüger.

Svenske Examensopgaver.

Maturitetsexamen.

(Vårterminen 1890.)

Algebraiska uppgifter.

1. Två 2-siffriga tals produkt är 1127. Sätter man det ena framför det andra och dividerar det sålunda bildade 4-siffriga talet med det andra, blir qvoten 47, och resten 46. Hvilka äro talen?

Opløsning. Af Ligningerne

$$xy = 1127$$
$$100x + y = 47y + 36$$

findes Tallene $x = 23$ og $y = 49$.

2. Bestäm x och y ur eqvationssystemet

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 156,$$
$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 104!$$

Opløsning. Ved Addition og Subtraktion af de givne Ligninger erholdes

$$x^3 + xy^2 = 130 = x(x^2 + y^2)$$
$$x^2y + y^3 = 26 = y(x^2 + y^2),$$

hvoraf $x = 5y$, som indsat giver $y^3 = 1$,

$$y = 1 \text{ eller } \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

og $$x = 5 \text{ eller } \frac{-5 \pm 5\sqrt{-3}}{2}.$$

3. Bestäm volymen af den kub, som inskrifves i en rät kon, hvars höjd är h och bottenradie r!

Opløsning. Kanten x i Kuben bestemmes af Ligningen

$$\frac{x}{r\sqrt{2}} = \frac{h-x}{h},$$

hvoraf $x = \frac{h r \sqrt{2}}{h + r\sqrt{2}}$; derefter er Volumen $V = x^3$.

4. En oregelbunden fyrhörnings sidor äro i ordning efter hvarandra 500, 250, 300 och 450 meter, och de båda förstnämnda sidorna göra med hvarandra en vinkel af 100^0. Beräkna fyrhörningens areal!

Opløsning. Firkantens Areal F er Summen af Arealerne T_1 og T_2 af de Trekanter, hvori den deles af den overfor Vinklen 100^0 liggende Diagonal d. Man har

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 250 \cdot \sin 100^0 = 61550.$$

$$d^2 = 500^2 + 250^2 - 2 \cdot 500 \cdot 250 \cdot \cos 100^0$$
$$= 355912, \quad d = 596{,}6.$$

$$T_2 = \sqrt{s \cdot (s-d)(s-300) \cdot (s-450)},$$

idet s er dens Halvperimeter. Udregning giver

$$T_2 = 65611, \quad \text{altsaa } F = 127161 \text{ Kvm.}$$

5. Ett mångsiffrigt, helt tal, som kan jemnt divideras med 37 är gifvet.

Bevisa, att differensen mellan det tal, som uppkommer, då sista siffran af det gifna borttages, och denna sista siffra, elfva gånger tagen, kan jemnt divideras med 37!

Opløsning. Det givne Tal være $10a + b = 37m$. Man har da $a - 11b = a - 11(37m - 10a)$

$$= 111a - 11 \cdot 37m$$
$$= 37(3a - 11m).$$

hv. sk. b.

6. Ett upptaget lån skall på det sätt återbetalas, att vid slutet af hvart och ett af de tre första åren erläggas i ränta och amortering tillsammans 7 % af det ursprungliga lånebeloppet, vid slutet af hvart och ett af de tre följande 6 %,

men sedermera vid hvarje års slut endast 5 %. Räntefoten är 4 % o. När blir lånet amorteradt?

Opløsning. Kaldes det søgte Antal Aar 6 + x, bestemmes x ved Ligningen

$$1{,}04^6 - \frac{7}{4}(1{,}04^3 - 1) \cdot 1{,}04^3 - \frac{6}{4} \cdot (1{,}04^3 - 1)$$

$$= \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{1{,}04^x}).$$

Ved 5-cifrede Logarithmer faas $1{,}04^6 = 1.2653$, $1{,}04^3 = 1{,}1248$, som indsat giver

$$0{,}8324 = \frac{5}{4} \cdot (1 - \frac{1}{1{,}04^x}),$$

hvoraf $x = c.\,28.$

7. Bestäm x ur eqvationen:

$$\operatorname{tang}(\frac{3}{2}x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x}!$$

Opløsning. Ligningen omskrives til

$$\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\cos\frac{3}{2}x} = \frac{\sin 2x}{\cos x},$$

$$\sin\frac{3}{2}x \cos x = \sin 2x \cos\frac{3}{2}x,$$

$$\sin\frac{5}{2}x + \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{7}{2}x + \sin\frac{x}{2},$$

hvoraf enten $\frac{7}{2}x = \frac{5}{2}x + p \cdot 360^0$, $x = p \cdot 360^0$,

eller $\frac{7}{2}x = 180^0 - \frac{5}{2}x + p \cdot 360^0$, $x = 30^0 + p \cdot 60^0$.

Den sidste Værdirække passer naturligvis i Ligningen paa hel Form. Men giver man f. Ex. p Værdien 1, altsaa $x = 90^0$, bliver venstre Side af den forelagte Ligning — 1, højre Side ubestemt med sand Værdi 2 ($2 \sin 90^0$). Værdien $x = 90^0$ kan altsaa forsaavidt siges at passe i Ligningen, som den giver venstre Side en af de uendelig mange Værdier, højre Side faar, men da det ikke er den saakaldte sande

Værdi ɔ: den Værdi, Størrelsen nærmer sig jævnt til, naar x nærmer sig til 90^0, maa det betragtes som mere stemmende med mathematisk Vedtægt at sige, at $x = 90^0$ ikke tilfredsstiller Ligningen. Det samme gælder for alle de Værdier af x i den anden Værdirække, som gøre $\cos x = 0$, altsaa dem der svare til $p = \ldots - 2, 1, 4, 7 \ldots$

Geometriska uppgifter.

1. Omskrif kring en gifven cirkel ett paralleltrapezium, i hvilket de båda icke parallela sidorna hafva gifna längder.

Opløsning. Til den givne Cirkel trækkes to parallele Tangenter, paa hvilke Trapezets parallele Sider skulle ligge, og mellem dem afsættes et vilkaarligt Sted de givne Længder; Tangenter parallele med disse give Trapeziets to andre Sider. 2 forskjellige Løsninger.

2. Sök två sådana räta linier, att den af dem bildade rektangeln är lika stor med en gifven rektangel, och att summan af deras qvadrater är lika stor som den qvadrat, hvilken uppritas på en af den gifna rektangelns sidor.

Opløsning. Det givne Rektangels Sider være a og b. Over a som Diameter tegnes en Halvcirkel; en Linie trækkes parallel med a i Afstanden b, dens Skæringspunkt med Cirklen forbindes med a's Endepunkter; disse Forbindelseslinier ere de søgte. Thi kaldes de x og y, har man $x^2 + y^2 = a^2$ og $xy = ab$. Mulighedsbetingelse: $b \leqq \frac{a}{2}$.

3. Bevisa, att i en liksidig hyperbel är afståndet från hvilken punkt som helst på kurvan till centrum medelproportionalen mellan afstånden från samma punkt till brännpunkterna!

Opløsning. Kaldes Centrum O, Brændpunkterne F og F_1, det løbende Punkt M med Koordinaterne x og y, idet Hyperblens Axer ere Koordinataxer, haves

$$FM = x\sqrt{2} + a$$

$$F_1M = x\sqrt{2} - a,$$

altsaa $$FM \,.\, F_1M = 2x^2 - a^2.$$

$$OM^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - a^2, \text{ da } x^2 - y^2 = a^2.$$

Følgelig $$OM^2 = FM \,.\, F_1M.$$

4. Att konstruera orten för en sådan punkt, att summan af dess afstånd från två gifna räta linier alltid är lika med en gifven längd.

Opløsning. Det geometriske Sted er Perimeteren af det Rektangel, der dannes af Halveringslinierne af Vinklerne mellem den ene givne Linie og to Linier parallele med den anden i den givne Længdes Afstand.

5. Sök orten för medelpunkterna till de cirklar, som från en gifven punkt synas under synvinkeln α och på samma gång från en annan punkt under synvinkeln β.

Opløsning. Kaldes de givne Punkter A og B, Centrnm for en Cirkel, der opfylder Betingelsen O og denne Cirkels Radius r, haves

$$OA = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad OB = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

altsaa $$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{n},$$

hvor m og n faas ved udad det ene Ben henholdsvis af $\frac{\beta}{2}$ og $\frac{\alpha}{2}$ at afsætte Stykket 1 og fra Endepunktet nedfælde en vinkelret (m eller n) paa det andet Ben. Det geometriske Sted for O er da som bekendt en Cirkel, der til Diameter har Stykket mellem de Punkter, der dele AB harmonisk i Forholdet $\frac{m}{n}$.

6. I en cirkel äro inskrifna en liksidig triangel, en qvadrat och en regulier femhörning. Bevisa, att summan af qvadraterna

på triangelns sida och på qvadratens sida är lika stor med summan af qvadraterna på femhörningens sida och på dess diagonal!

Opløsning. Med let forstaaelige Betegnelser er

$$k_3^2 = 3r^2,\quad k_4^2 = 2r^2.$$

$$k_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}),\quad d_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 + 2\sqrt{5}),$$

altsaa $$k_3^2 + k_4^2 = k_5^2 + d_5^2 = 5r^2.$$

7. En triangel är inskrifven i en cirkel, och från en punkt på cirkelns periferi äro perpendiklar dragna mot triangelns sidor och deras förlängningar. Bevisa, att dessa perpendiklars fotpunkter ligga på en rät linie!

Opløsning. Den angivne Sætning (Simsoms Sætning) bevises saaledes:

Den givne Trekant være ABC, Punktet P. Fra P nedfældes PG vinkelret paa BC og PE vinkelret paa AC. EG skære AB i H. Det skal da bevises, at PH er vinkelret paa AB.

Man har $$\angle PBA = \angle PCA,$$
og da Firkanten GPEC er indskrivelig:
$$\angle PCE\,(A) = \angle PGE,$$
følgelig $$\angle PBA\,(H) = \angle PGE\,(H),$$
altsaa er Firkanten PBGH indskrivelig og $\angle$ PHB $= \angle$ PGB $= 90^0$. hv. sk. bev.

Uppgifter med mekaniskt och fysikaliskt innehåll.

1. Ett fartyg går med $2^1/_4$ m:s hastighet i syd-sydvestlig rigtning. Åt hvilket håll skulle en på masttoppen anbragt vimpel vara rigtad, om vinden vore nordostlig och dess hastighet $5\,^3/_4$ m.?

Opløsning Vimpelretningen danner med Sydvestretningen en Vinkel x (til Vest) bestemt ved

$$\frac{2\frac{1}{4}}{\sin x} = \frac{5\frac{3}{4}}{\sin(22\frac{1}{2}^0 + x)},$$

hvoraf $$x = c.\ 13^0\,12'.$$

2. Ur mynningen af en kanon, hvars urborrning (lopp) har en diameter af 8 cm., utskjutes med 390 m:s hastighet en cylindrisk projektil af 6,5 kg:s vigt efter att hafva tillryggalagt i loppet en väg af 11 dm. Huru stort är krutgasens öfvertryck, uppmätt i atmosferer, under förutsättning att det samma under hela tiden varit oförändradt?

Uppmätt i qvicksilfverpelare är 1 atmosfers tryck 76 cm.; qvicksilfrets egentliga vigt är 13,6, accelerationen vid fritt fall 9,8 m.

Opløsning. Det søgte Tryk x, maalt i gr., bestemmes af Ligningen

$$x \cdot 11 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6500}{98} \cdot 3900^2,$$

hvoraf

$$x = \frac{6500 \cdot 3900^2}{2 \cdot 98 \cdot 11} \text{ gr.}$$

$$= \frac{6500 \cdot 3900^2}{2 \cdot 98 \cdot 11 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 76 \cdot 13{,}6} \text{ Atmosf.}$$

$$= 882{,}6 \text{ Atmosf.}$$

3. Ett öppet cylindriskt kärl, som invändigt håller 42 cm. i djup, nedföres vid ett barometerstånd af 74 cm. med öppningen rätt nedåt i glycerin så långt, att bottnens inre ytplan kommer i jemnhöjd med den yttre vätskeytan. Huru högt ställer sig då vätskan inuti kärlet?

Qvicksilfrets egentliga vigt är 13,6, glycerinens 1,26.

Opløsning. Kaldes Afstanden fra Glassets Bund til Overfladen af Vædsken i Glasset $x^{cm.}$, haves til Bestemmelse heraf Ligningen

$$74 \cdot 13{,}6 + x \cdot 1{,}26 = \frac{74 \cdot 42}{x} \cdot 13{,}6,$$

hvoraf $x = 40$. Vædsken stiger altsaa 2 cm. op i Glasset.

4. En orgelpipa bringas att ljuda ena gången medelst vätgas, andra gången medelst luft. En sträng af viss längd gifver, då den spännes med en belastning af 9,0 kg., samma ton som orgelpipan i det förra fallet. Om strängens längd

fördubblas och belastningen minskas till 2,5 kg., blir strängens ton densamma som orgelpipans i det senare fallet. Huru stor är ljudets fortplantningshastighet i vätgas, då fortplantningshastigheten i luft är 340 m.?

Opløsning. Kaldes den søgte Hastighed v, Tonernes Svingningstal henholdsvis n og n_1, har man

$$\frac{v}{340} = \frac{n}{n_1} = \frac{2 \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{2,5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

hvoraf $$v = 1290 \text{ m.}$$

5. Tre vätskor A, B og C, som ej kemiskt inverka på hvarandra, hafva i ordning temperaturerna 100^0, 50^0 och 0^0. Om lika vigter af A och B blandas tillsamman, blir temperaturen hos blandningen $52,4^0$. Blandas lika vigter af B och C, blir blandningstemperaturen $28,9^0$. Hvilken temperatur skulle erhållas om lika vigter af A och C blandades med hvarandra?

Opløsning. Kaldes Varmefylderne for Vædskerne henholdsvis x, y og z, den søgte Blandingstemperatur t^0, haves

$$x \cdot 47,6 = y \cdot 2,4$$
$$y \cdot 21,1 = z \cdot 28,9$$
$$z \cdot t = x \cdot (100 - t),$$

hvoraf $$476 \cdot 211 \cdot t = 24 \cdot 289 \cdot (100 - t),$$
$$t = 6,46.$$

6. En liten skärm belyses från samma sida af två ljuskällor, en ljuslåga och en lamplåga, som båda befinna sig midt framför skärmen, den förra på 5 dm:s, den senare på 12 dm:s afstånd från densamma. Man vill öka ljuslågans afstånd till 12 dm., men önskar, att skärmens belysning ändock skall förbli oförändrad. Huru mycket bör i sådant fall lamplågans afstånd ändras, då hennes ljusstyrka är 9 gånger så stor som ljuslågans?

Opløsning. Lampens nye Afstand fra Skærmen være x dm., der bestemmes ved

$$\frac{1}{5^2} + \frac{9}{12^2} = \frac{1}{12^2} + \frac{9}{x^2},$$

hvoraf $x = 9,7.$

Lampen skal altsaa flyttes 2,3 dm. nærmere til Skærmen.

7. En galvanisk ström, som på en i dess bana insatt tangentbussol gifver ett utslag af 24^0, utvecklar i en viss del af ledningstråden under en gifven tid en värmemängd af 3,2 enheter. Huru mycket värme utvecklas i denna delen af ledningen på lika lång tid, om strömstyrkan ökas så mycket, att utslaget på bussoln blir 41^0?

Opløsning. $3,2 \cdot \frac{tg^2 41^0}{tg^2 24^0} = 12,2$ Varmeenheder.

P. T. F.

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

(Marts 1890.)

Praktisk Regning.

1. Den danske Regering slutter Akkord med et engelsk Selskab om Anlæggelse af en Jernbane, der skal være $5\frac{1}{6}$ dansk Mil lang. Selskabet skal have 5896 £ for hver engelsk Mil og 91 £ skal regnes for 1645 Kr. Hvor meget kommer Jernbanen til at koste i danske Penge, naar 67 danske Fod er lig med 69 engelske Fod og 1 engelsk Mil deles i 5280 Fod?

Opløsning. $\frac{26 \cdot 24000 \cdot 69 \cdot 5896 \cdot 1645}{5 \cdot 67 \cdot 5280 \cdot 91} = 2594400$ Kr.

2. Paa en cirkelformet Plads, hvis Omkreds er $64\frac{8}{27}$ Favne, er der opstillet en Del kegleformede Telte, af hvilke ethvert er 6,6 Alen højt og har en Omkreds forneden af 50 Fod. Hvor mange Telte er der, naar Mellemrummene mellem

Teltene udgjøre 19 pro Cent af hele Pladsens Areal? Hvor mange Mand kan der ligge i hvert Telt, naar hver Mand skal have 125 Kubikfod Luft?

En Kegles Rumfang er en Tredjedel af Grundfladens og Højdens Produkt.

Opløsning. Antallet af Telte $= \frac{3500^2 \cdot 81}{81 \cdot 100 \cdot 50^2} = 49.$

I hvert Telt kan der ligge $\frac{25^2 \cdot 4{,}4}{\pi \cdot 125} = 7$ Mand.

Arithmetik.

1. En Vexellerer tjener 25 pro Cent paa sin Indkjøbspris ved at sælge nogle Værdipapirer for 75 pro Cent af den Værdi, som de lyde paa. Med hvor mange pro Cent af deres paalydende Værdi maa han da selv have betalt dem?

Opløsning. $\frac{75 \cdot 100}{125} = 60$ pro Cent.

2. Find x med fire Decimaler, naar

$$\log x = 10^{-\sqrt{3}}.$$

Opløsning. $\log \log x = -\sqrt{3} = -1{,}73205$

$$= 0{,}26795 - 2.$$

$$\log x = 0{,}01853$$

$$x = 1{,}0436.$$

3. For hvilke Værdier af y bliver Brøken

$$\frac{6y^2 + 7y - 5}{2y^2 - 15y + 7}$$

lig med Nul eller uendelig stor?

Opløsning. Da Tælleren bliver 0 for $y = \frac{1}{2}$ og $y = -\frac{5}{3}$, Nævneren 0 for $y = \frac{1}{2}$ og $y = 7$, bliver Brøken 0 for $y = -\frac{5}{3}$, ∞ for $y = 7$.

Geometri.

1. Hvor stor er Højden paa et af Benene i en ligebenet Trekant, naar Højden fra Toppunktet er h, og ethvert af Benene er dobbelt saa stort som denne?

Opløsning. Da Grundlinien er $2h\sqrt{3}$, faas

$$x \cdot 2h = h \cdot 2h\sqrt{3},$$
$$x = h\sqrt{3}.$$

Det samme kan faas ved at benytte, at Topvinklen er 120^0, altsaa dens Nabovinkel 60^0; den søgte Højde er da Kathete i en retvinklet Trekant, hvis anden Kathete er h og hvis Hypotenuse er 2h.

2. I et Trapez ABCD forlænges de to ikke parallele Sider AB og CD, til de skære hinanden i O, og Diagonalen AC trækkes. Bevis, at af Arealerne af Trekanterne OAC, OBC og OAD er det ene Mellemproportional mellem de to andre.

Opløsning. Man har $\frac{OBC}{OAC} = \frac{OB}{OA}$

og $\frac{OAC}{OAD} = \frac{OC}{OD}$.

Men $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$,

altsaa $\frac{OBC}{OAC} = \frac{OAC}{OAD}$, hv. sk. bev.

3. Der er givet en Cirkel og to Punkter M og N indenfor Periferien. Indskriv en Trekant i Cirklen saaledes, at dens ene Side gaar gjennem M, den anden gjennem N, medens den tredje Side afskærer en Bue, som er en Fjerdedel af Periferien.

Opløsning. Skæringspunktet mellem den givne Cirkel og en Bue over MN som Korde, rummende en Vinkel paa 45^0, er den søgte Trekants ene Vinkelspids; Linier fra denne gjennem M og N de to Sider. Indtil 4 Løsninger.

P. T. F.

Løste Opgaver. *)

5. Find Grænseværdien af

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\ldots$$

Opløsning. Benytter: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$;

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+2)}.$$

$$(1)\ S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\ldots;$$

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{5}$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{6}+\ldots;$$

$$S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\ldots.$$
$$-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\ldots\right);$$

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+.-..\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.-..\right).$$

Man ser nu let, at man for n af Brøkerne i (1) maa have

$$S=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Naar n voxer uden Grænse, vil S altsaa nærme sig til $\frac{1}{4}$.

(C. Friderichsen.)

Denne Opgave er i en noget udvidet Form løst af Hr. Alf Guldberg og i en mere udvidet Form af Hr. Theodor Ney og Hr. Adj. Åsted (se S. 58).

8. I et givet Punkt M af et Keglesnit trækkes Tangent og Normal og i Normalens andet Skæringspunkt N med

---

*) Den i forrige Nr. af A optagne Løsning af Opg. 3 er af Hr. J. C. Carlsen. Efter Red.'s Slutning er indkommet Løsninger til denne og til Nr. 1 og 4 fra Hr. Th. Ney.

Keglesnittet trækkes en Tangent, der skærer den første Tangent i P. Gjennem P trækkes en vilkaarlig Linie, skærende Keglesnittet i Q og R. Søg det geometriske Sted for Centrum af Trekant MQR's indskrevne Cirkel.

Opløsning. 1. (synthetisk.) Da P er Pol og MN er Polar, er QRAP (A er PRQ's Skæringspunkt med MN) harmonisk forbundne Punkter. Da $\angle$ AMP er 90^0, er MA Vinklen QMR's Halveringslinie. Følgelig er MN det geometriske Sted for Cirklens Centrum.

(P. R. Petersen.)

(Ogsaa løst af Th. Ney.)

Opløsning. 2. (analytisk.) Eqvationen för ett käglesnitt är i allmänhet

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Vi välja nu tangenten MP till x-axel och normalen MN till y-axel. De 2 Skärningspunkter, linien (1) i allmänhet har med x-axeln, skola i sådant fall sammanfalla till en: origo (M). Sätta vi då $y = 0$, blir eqv. (1):

$$Ax^2 + Dx + F = 0.$$

Enär denna eqv. nu blott skulle hafva roten $x = 0$, måste således $D = F = 0$, hvarigenom (1) öfvergår till

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0. \qquad (2)$$

Sättes här $x = 0$, finner man $y = 0$ och $y = -\frac{E}{C}$, som äro ordinaterna för M och N.

Genom punkten N skulle en tangent dragas. Eqv. för en rät linie genom den punkten är i allmänhet

$$y + \frac{E}{C} = kx. \qquad (3)$$

Insättes y-värdet ur (3) i (2), erhålles

$$(A + Bk + Ck^2)x^2 - E\left(\frac{B}{C} + k\right)x = 0.$$

Skola nu begge skärningspunkterna mellan (2) och (3) sammanfalla till en N, måste $k = -\frac{B}{C}$, och tangentens NP eqvation blir

$$y = -\frac{Bx + E}{C}. \qquad (4)$$

Denna tangents skärningspunkt (P) med x-axeln blir

$$x = -\frac{E}{B},\ y = 0.$$

Eqv. för en rät linie PQR genom P blir

$$y = q\left(x + \frac{E}{B}\right). \qquad (5)$$

Ur (2) och (5) erhållas koordinaterna för skärningspunkterna Q och R. Om man emellertid gir akt på, att ur (5) erhålles

$$Bx + E = \frac{By}{q},$$

och insätter detta i (2), finner man

$$Ax^2 + \left(\frac{B}{q} + C\right) y^2 = 0,$$

eller

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{-\frac{Aq}{B + Cq}}. \qquad (6)$$

(6) blir just eqvationerna för MQ och MR. Af formen på eqv. (6) ser man, att vinkeln QMR skäres midt i tu af MN. Medelpunkten till en cirkel, som inskrifves i triangeln MQR, måste således också altid ligga på MN.

(J. R. Åkerlund.)

Blandinger.

Udvidelse af Opgave 5.

Søg Summen $S_{p,n}$ af n Led af Rækken:

$$\frac{1}{a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(p-1)d]},\quad \frac{1}{(a+d)(a+2d)\ldots(a+pd)},\ \ldots$$

$$\frac{1}{[a+(n-1)d](a+nd)\ldots[a+(n+p-2)d]}, \qquad (1)$$

og bestem dens Grænseværdi.

Man har:

$$\frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)} = \frac{2}{a(a+2d)},$$

$$\frac{2}{a(a+2d)} + \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} = \frac{3}{a(a+3d)},$$

og slutter heraf, at $S_{2,n} = \frac{n}{a(a+nd)}$, hvis Rigtighed let bevises ved Induktion. Ved at dividere Tæller og Nævner med n, som derefter sættes $= \infty$, faas $S_{2,\infty} = \frac{1}{ad}$ og Resten af Rækken, $R_{2,n} = \frac{1}{ad} - \frac{n}{a(a+nd)} = \frac{1}{d(a+nd)}$, saa at

$$S_{2,n} = \frac{1}{da} - \frac{1}{d(a+nd)}. \tag{2}$$

Man har endvidere at:

$$\frac{1}{a(a+d)(a+2d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)} = \frac{2a+3d}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)},$$

$$\frac{2a+3d}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)} + \frac{1}{(a+2d)(a+3d)(a+4d)} = \frac{3a+6d}{a(a+d)(a+3d)(a+4d)},$$

$$\frac{3a+6d}{a(a+d)(a+3d)(a+4d)} + \frac{1}{(a+3d)(a+4d)(a+5d)} = \frac{4a+10d}{a(a+d)(a+4d)(a+5d)},$$

og fører Induktionsbevis for, at

$$S_{3,n} = \frac{na + \frac{n(n+1)}{2}d}{a(a+d)(a+nd)[a+(n+1)d]}. \quad n = \infty \text{ giver:}$$

$$S_{3,\infty} = \frac{d}{2a(a+d)d^2} = \frac{1}{2ad(a+d)},$$

$$R_{3,n} = \frac{1}{2ad(a+d)} - \frac{2na + n(n+1)d}{2a(a+d)(a+nd)[a+(n+1)d]}$$

$$= \frac{1}{2d(a+nd)[a+(n+1)d]} \quad \text{og}$$

$$S_{3,n} = \frac{1}{2da(a+d)} - \frac{1}{2d(a+nd)[a+(n+1)d]}. \tag{3}$$

Ligeledes finder man:

$$S_{4,n} = \frac{1}{3da(a+d)(a+2d)}$$
$$- \frac{1}{3d(a+nd)[a+(n+1)d][a+(n+2)d]}. \quad (4)$$

Af (2), (3) og (4) sluttes, at

$$S_{p,n} = \frac{1}{(p-1)d \cdot a(a+d)(a+2d) \ldots [a+(p-2)d]}$$
$$- \frac{1}{(p-1)d(a+nd)[a+(n+1)d] \ldots [a+(n+p-2)d]} \quad (5)$$

Adderes Rækkens $(n+1)$te Led til $S_{p,n}$, faas $S_{p,n+1}$. Ved denne Addition beholdes det første Led uforandret, det andet Led bliver

$$\frac{1}{(a+nd)[a+(n+1)d] \ldots [a+(n+p-1)d]}$$
$$- \frac{1}{(p-1)d(a+nd) \ldots [a+(n+p-2)d]}$$
$$= - \frac{1}{(p-1)d[a+(n+1)d][a+(n+2)d] \ldots [a+(n+p-1)d]},$$

som dannes af det andet Led i (5) ved at ombytte n med $n+1$. Dette viser, at dersom Loven gælder i ét Tilfælde, gælder den ogsaa i det næste. (5) reduceres imidlertid, naar n sættes lig 1, til det første Led i (1) og gælder altsaa, naar $n = 1, 2, 3 \ldots$, ɔ: Loven er almengyldig. *)

(5) giver nu

$$S_{p,\infty} = \frac{1}{(p-1)d \cdot a(a+d)(a+2d) \ldots [a+(p-2)d]}.$$

Specielt lægges Mærke til $S_{3,\infty} = \frac{1}{2ad(a+d)}$, hvori a og d kunne ombyttes, uden at Værdien forandres.

*) Skjønt den fundne Summationsformel findes i adskillige Lærebøger, f. Ex. i Todhunters Algebra under Formen $S_n = \frac{a+(p-1)d}{(p-1)du_1} - \frac{a+(n-1)d}{(p-1)du_n}$, er den næppe almindelig bekjendt, og Hr. Åsteds instruktive Udvikling vil derfor være af Interesse.

Sættes $a = d = 1$, bliver

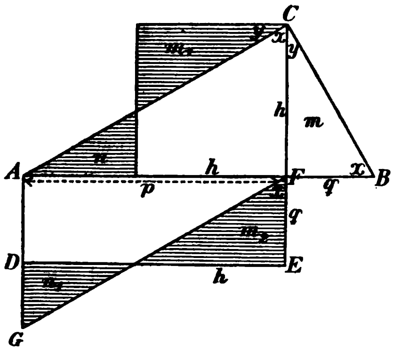
$$S_{p,\infty} = \frac{1}{(p-1)\,\underline{|p-1}}.$$

$$S_2, \infty = 1, \quad S_3, \infty = \frac{1}{4} \text{ o. s. v.}$$

Åsted.

* * *

Sætningen: I en retvinklet Trekant er Højdens Kvadrat lig Hypotenusens Stykkers Rektangel, kan bevises ved Anvendelse af Sætninger om Kongruens og Ligestorhed (uden Brug af Ligedannethed) paa følgende Maade:



Kaldes Højden h, de Stykker, hvori den deler Hypotenusen, p og q, da skal bevises, at $h^2 = pq$.

Rektanglet pq og Kvadratet h^2 tegnes hver paa sin Side af Hypotenusens længste Stykke p, som Figuren viser. Rektanglets Side AD forlænges, og fra Højdens Fodpunkt F drages FG parallel med AC. Da er ACFG et Parallelogram, og Trekanterne AFG og FAC kongruente, hver $= \frac{1}{2}$ ACFG. Endvidere ere de retvinklede Trekanter kongruente, som paa Fig. ere betegnede med samme Bogstaver ($m \cong m_1 \cong m_2$ og $n \cong n_1$), thi som let kan ses, have de 1 Side og 2 hosliggende Vinkler stykkevis lige store.

$$\text{Kvadratet } h^2 \text{ er da} = \frac{1}{2} \text{ ACFG} + m - n,$$

$$\text{og Rektanglet } pq = \frac{1}{2} \text{ ACFG} + m - n,$$

$$\text{alsaa } h^2 = pq.$$

H. Nissen.

(Findes i Forf.'s Geometri for Borger- og Almueskoler).

Opgaver til Løsning.

16. Udtryk Forholdet

$$\frac{\sin^2 x + \sin x \sin y \cos (x + y)}{\sin^2 y + \sin x \sin y \cos (x + y)}$$

alene ved tang x og tang y.

(Chr. Hansen.)

17. Find Rødderne i Ligningen

$$x^4 = \frac{7x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 7x + 7}.$$

(Samme.)

18. At opløse Ligningerne

$$x^3 = ax + by$$
$$y^3 = bx + ay.$$

(Samme.)

19. I en Firkant, hvori der kan indskrives en Cirkel, ere de to korteste Sider a og b, de modsatte henholdsvis c og d. Betegner nu ϱ Radius i Firkantens indskrevne Cirkel og ϱ_s Radius i den Cirkel, der rører Siden s og de to til s stødende Siders Forlængelser, da er

$$\frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho - \varrho_b} \cdot \frac{\varrho_d - \varrho_b}{\varrho_c - \varrho_a} = \frac{a}{b},$$

hvilket ønskes bevist.

(Samme.)

20. Naar r_A, r_B, r_C betegne Radierne i de Cirkler, der kunne omskrives om de tre Firkanter, hvori en Trekant deles ved Højderne, da er

$$\frac{r_B\, r_C}{bc} + \frac{r_C\, r_A}{ca} + \frac{r_A\, r_B}{ab} = \frac{1}{4},$$

hvilket ønskes bevist.

(Samme.)

21. M være Midtpunkt og C Centrum af en Cirkelbue AB, samt D fjerde Hjørne i Parallelogrammet ABCD. Vis, at en Cirkelbue om D gjennem M deler Korden AB i det yderste og mellemste Forhold.

Holdes AB fast giver Valget af C i enkelte Tilfælde smukke Sætninger, saaledes naar $\angle$ ACB er 60^{0} eller 120^{0}.

(E. B. Holst.)

Korrespondance.

Hvorledes løses opgaverne i geometri i Guldbergs mathematiske opgaver nr. 164, 168, 169 og 206?

Nr. 164. Find siderne i et retvinklet triangel, når man kjender summen af catheterne $= s$ og høiden fra den rette vinkels toppunkt ned på hypotenusen $= h$.

Nr. 168. At finde siderne i et retvinklet triangel, når man kjender radierne r og R til den ind- og omskrevne cirkel.

Nr. 169. Find forholdet mellem catheterne i et retvinklet triangel, når trianglets 3 sider såvel danner en arithmetisk som en geometrisk række.

Nr. 206. Find siderne og fladeindholdet af det triangel, hvis høider er h, h' og h''.

A. N.

Svar. 164. Katheterne x og y. $x + y = s$; $xy = h\sqrt{x^2 + y^2} = h\sqrt{s^2 - 2xy}$ giver $xy = -h^2 + \sqrt{h^4 + h^2s^2}$, hvorefter x og y findes som Rødder i Ligningen $z^2 - s\,.\,z - h^2 + \sqrt{h^4 + h^2s^2} = 0$.

168. Hypotenusen $= 2R$. Katheterne x og y findes af $x^2 + y^2 = 4R^2$ og $xy = r\,(x + y + 2R)$, hvoraf først findes $x + y$ og xy, dernæst x og y som Rødder i en kvadratisk Ligning.

169. Danne Siderne den arithmetiske Række $x - y$, x, $x + y$, haves $(x + y)^2 = (x - y)^2 + x^2$ hvoraf $x = 4y$, altsaa Katheternes Forhold $3:4$. — Danne Siderne den geometriske Række $\frac{a}{q}$, a, aq, haves $a^2q^2 = a^2 + \frac{a^2}{q^2}$, hvoraf Katheternes Forhold $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$.

206. Siderne a, b og c findes af Ligningerne $ah = bh' = ch''$ og $\pm\sqrt{c^2 - h^2} \pm \sqrt{b^2 - h^2} = a$, hvilken sidste ved Anvendelse af de første ændres til $\pm\frac{h}{h''}\sqrt{a^2 - h''^2} \pm \frac{h}{h'}\sqrt{a^2 - h'^2} = a$, der rationaliseres til en Ligning indeholdende a^4 og a^2, som altsaa let løses. Fladeindholdet $= \frac{1}{2}\,ah$.

Svar til S. i s. Nr. 4 og 5 af de fysiske Opgaver ved svensk Maturitetsexamen, Høstterminen 1889, løses saaledes:

4. Kaldes det indre Volumen af Thermometret under Frysepunktet ved 0^0 V, mellem Fryse- og Kogepunkt v, begge udtrykte i Kubikcm., haves

$$V \,.\, 13{,}6 = 19{,}82$$

$$V \,.\, 1{,}018 = (V + v) \,.\, 1{,}0025,$$

hvoraf v kan findes og dernæst Tværsnittet ved Division med 21,85.

5. Af $\frac{77{,}5}{1 + 95/273} = \frac{40}{1 + t/273} = \frac{37{,}5}{(95 - t)/273}$ findes Temperatursænkningen 95 — t. Den borttagne Varmemængde er 390 . (95 — t) . 0,17 Gramkalorier.

Sætningen »elementen ordnas jämte hvarandra, så att de bilda ett par« forstaas af os saaledes, at de skulle »bilda ett par element« og ud fra den Forudsætning løse vi den paagjældende Opgave, medens De forstaar det saaledes: »bilda ett par plåter« m. a. Ord ét Element.

Der er ikke udgivet Løsninger til »Mathematiske Examensopgaver«.

Indsendte Spørgsmaal vedrørende Æmner, der ligge indenfor Tidsskriftets Ramme, kunne ventes besvarede i det først udkommende Hefte, saavidt Pladsen tillader det. Ærede Indsendere bedes foruden det Mærke, under hvilket Svaret ønskes, tillige opgive Navn og Adresse til Oplysning for Redaktionen.

Bøger tilsendte Redaktionen.

Förslag till Materiel vid Undervisning i räkning, af K. P. Nordlund. Andra öfversedda upplagan. Upsala, W. Schultz.

Matematikkens ABC, af Albert Svendsen. Helsingør, Jens Møller.

Stereometrische Aufgaben. Herausgegeben von Prof., Dr. Lieber. Berlin, Leonhard Simion.

Geometrische Konstruktions-Aufgaben. Herausgegeben von Prof., Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. Achte Auflage. Berlin, Leonhard Simion.

Trigonometrische Aufgaben. Herausgegeben von Prof., Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. Dritte Auflage. Berlin, Leonhard Simion.

Synthetische Beweise planimetrischer Sätze, von W. Fuhrmann. Berlin, Leonhard Simion.

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

Juni 1890.

Praktisk Regning.

1. A køber den 18 Oktober 10 Obligationer, der hver lyder paa 100 Kr., hvoraf der svares 4 Procent aarlig Rente af deres paalydende Værdi, til Kurs $95\frac{1}{3}$ (ɔ: han betaler $95\frac{1}{3}$ Kr. for 100 Kr. i Obligationer), og 12 Obligationer, der hver lyder paa 200 Kr., hvoraf svares $3\frac{3}{5}$ Procent aarlig Rente, til Kurs $92\frac{2}{3}$. Hvor meget skal han betale, naar han foruden Købesummen skal betale Renter (simpel Rente) af Obligationerne fra nærmest foregaaende 11. Juni til den Dag, han købte dem? De nævnte Dage regnes ikke med, og hver Maaned regnes for 30 Dage, og altsaa Aaret for 360 Dage.

Opløsning. Købesummen $= 10 \,.\, 95\frac{1}{3} + 12 \,.\, 2 \,.\, 92\frac{2}{3}$

$= 3177$ Kr. $33\frac{1}{3}$ Øre.

$$\text{Renterne} = \frac{126 \,.\, 4 \,.\, 10}{360} + \frac{126 \,.\, 3{,}6 \,.\, 2 \,.\, 12}{360}$$

$= 44$ Kr. 24 Øre.

Ialt 3221 Kr. $57\frac{1}{3}$ Øre.

2. Af 2 Metalblokke, der have Form af Tærninger, hvis Kanter ere givne, a Fod og b Fod, skal ved Sammensmeltning dannes en Kugle. Hvor stor bliver dennes Radius og hvor stor dens Vægt, naar der gives, at Metallets Vægtfylde er c og 1 Kubikfod Vand vejer d ℔?

Ekspl. $a = 1{,}2384$, $b = 0{,}7536$, $c = 11{,}34$, $d = 61{,}8317$. Tærningens Kubikindhold er k^3, hvor k betegner Kanten, og Kuglens $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Opløsning. $\frac{4}{3}\pi r^3 = a^3 + b^3$ giver $r = \sqrt[3]{\frac{3(a^3+b^3)}{4\pi}}$.

Kuglens Vægt $V = (a^3 + b^3)\, cd$ ℔.

I Exemplet bliver $a^3 = 1{,}89926$, $b^3 = 0{,}42798$. $\log(a^3 + b^3) = 0{,}36684$, hvorved

log r = 0,91492 — 1; Radien 0,8221 Fod.
log V = 3,21266; Vægten 1631,8 ℔.

Arithmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$\frac{5}{3x} - \frac{4}{9y} = 9 \text{ og } 27xy = -1.$$

Opløsning. Den første Ligning ændres til

$$15y - 4x - 81xy = -3,$$

hvoraf $y = \frac{4x - 3}{15}$, som indsat i den anden

giver $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{36} = 0,$

hvoraf $x = \frac{5}{12}$ eller $\frac{1}{3}$,

hvortil svarer $y = -\frac{4}{45}$ eller $-\frac{1}{9}$.

2. En Mand laaner i en Bank 60000 Kr., og efter et Aars Forløb betaler han 3150 Kr. i Rente. Det næste Aar foretrækker han at betale Renten i maanedlige Terminer; hvor meget har han da at betale hver Maaned, naar der skal tages Hensyn til Rentes Rente?

Opløsning. Renten af 1 pr. Aar er $\frac{3150}{60000} = 0,0525$. Dertil svarer en maanedlig Rentefod x bestemt ved $(1 + x)^{12} = 1,0525$; Renten pr. Maaned af Laanet bliver altsaa

$$60000 \cdot 1,0525^{\frac{1}{12}} - 60000 = 60255,7 - 60000 = 255,7 \text{ Kr.}$$

3. En Landmand brugte 5 Aar i Træk hvert Aar det samme Kvantum Korn til Udsæd; og i de 4 sidste Aar høstede han hvert Aar halv saa mange Fold som i det nærmest foregaaende. Hvor mange Fold høstede han det første Aar, naar han i alle 5 Aar tilsammen høstede $6\frac{1}{8}$ Gange saa meget Korn, som han i det hele havde saaet?

Ved n Fold skal forstaas n Gange Udsæden.

Opløsning. Ligningen $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} = 5 \cdot 6\frac{1}{5}$ $= 31$ giver første Aars Fold $n = 16$.

Geometri.

1. En Hest er tøjret i Kanten af en cirkelformet Eng, og Tøjret er lige saa langt som Cirklens Radius. Bevis, at Arealet af den Del af Engen, som Hesten kan afgræsse, udgør mindre end 40 Procent af hele Engens Areal.

Opløsning. Kaldes Engens Radius r, er det afgræssede Areal, der bestaar af to Afsnit med Bue 120^0, lig $2 \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}\right)$ og altsaa dets Forhold til Engens Areal

$$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6\pi} < \frac{2}{5},$$

da

$$20\pi - 15\sqrt{3} < 12\pi,$$

da

$$\pi < \frac{15\sqrt{3}}{8} = 3{,}24\ldots$$

Forholdet er altsaa mindre end 40 %. Ved Udregning findes det lig 0,391.

2. To Cirkler, der skære hinanden i P og Q, røre en Vinkels Ben; den enes Røringspunkter med Vinkelbenene betegnes ved A og A_1, den andens ved B og B_1, saaledes at A og B ligge paa samme Vinkelben. Bevis, at Linjen PQ's Forlængelser gaa gennem Midtpunkterne af AB og A_1B_1 samt at AA_1, BB_1 og PQ ere parallele.

Opløsning. Linien PQ skære AB og A_1B_1 henholdsvis i C og C_1. Da er

$$CA^2 = CP \cdot CQ = CB^2, \quad CA = CB.$$

$$C_1A_1^2 = C_1Q \cdot C_1P = C_1B_1^2, \quad C_1A_1 = C_1B_1.$$

Cirklernes Centerlinie staar vinkelret paa Midten af PQ, ligeledes af AA_1 og BB_1, da den halverer Topvinklen i de

ligebenede Trekanter AOA_1 og BOB_1 (O den givne Vinkels Spids). Følgelig ere AA_1, PQ og BB_1 parallele.

3. Konstruer en Rhombe, i hvilken den ene Diagonal er lig med Rhombens Side, naar der er givet to Punkter A og B, gennem hvilke denne Diagonal skal gaa, og et af den anden Diagonals Endepunkter skal ligge i et tredje givet Punkt C.

Opløsning. Gjennem C trækkes to Linier, der danne Vinkler paa 60^0 med AB, til Skæring med denne i de to Vinkelspidser. Den fjerde Vinkelspids er C's Modpunkt m. H. t. AB.

(P. T. F.)

Afgangsexamen for studerende.

Juni 1890.

Arithmetik.

1. Idet

$$p + q = a,$$
$$px + qy = b,$$
$$px^2 + qy^2 = c,$$
$$px^3 + qy^3 = d,$$

skal der findes en kvadratisk Ligning, i hvilken baade x og y ere Rødder, og hvis Koefficienter hverken indeholde p eller q.

Opløsning. Nummereres Ligningerne som de ovenfor staa, faar man ved at danne $(1).(4) - (2).(3)$,

$$pq\,[x^3 + y^3 - (xy^2 + x^2y)] = ad - bc$$

eller $$pq\,(x + y)(x^2 + y^2 - 2xy) = ad - bc.$$

$(1).(3) - (2)^2$ giver $pq\,(x^2 + y^2 - 2xy) = ac - b^2$,

$(2).(4) - (3)^2$ $\quad pq\,.\,xy\,(x^2 + y^2 - 2xy) = bd - c^2$.

Af disse faas, idet a, b, c og d forudsættes indbyrdes uafhængige, $x + y = \frac{ad - bc}{ac - b^2}$, $xy = \frac{bd - c^2}{ac - b^2}$,

saa at x og y ere Rødder i Ligningen

$$u^2 - \frac{ad - bc}{ac - b^2}\,u + \frac{bd - c^2}{ac - b^2} = 0.$$

2. Hvor mange Led er der i den Kvotientrække, hvis Sum er 3,964, naar det første Led i Rækken er $2\frac{1}{2}$, det sidste 5,184?

Opløsning. Kvotienten $q = \frac{s - a}{s - a_n} = -\frac{6}{5}$.

Er Leddenes Antal n, haves

$$\left(-\frac{6}{5}\right)^{n-1} = \frac{a_n}{a} = \frac{1296}{625} = \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1},$$

idet $n - 1$ maa være lige; faas lig 4, altsaa

$$n = 5.$$

Geometri.

1. To Breddecirkler, hvis sfæriske Afstand er p^0, begrænse et Bælte, hvis Areal er $\frac{1}{n}$ af hele Jordkuglens Overflade. Hvorledes findes Breddecirklernes sfæriske Afstande fra Ækvator?

Find endvidere Forholdet mellem Rumfanget af den Del af Jorden, der ligger uden for Keglefladen gennem de to Breddecirkler, og hele Jordkuglens Rumfang.

Ekspl. $p = 90^0$, $n = \sqrt{2}$.

Opløsning. Kaldes de søgte sfæriske Afstande x^0 og y^0, har man

$$x - y = p,$$

og idet Bæltets Højde er h, Kuglens Radius r

$$2\pi rh = \frac{1}{n} \cdot 4\pi r^2, \text{ hvoraf } h = \frac{2r}{n}.$$

Nu er imidlertid $r(\sin x - \sin y) = h$,

altsaa $$\sin x - \sin y = \frac{2}{n},$$

$$2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2} = \frac{2}{n},$$

$$\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{n \sin\frac{p}{2}},$$

hvoraf $x + y$ kan findes, derefter x og y. I Exemplet er $\cos\frac{x+y}{2} = 1$, $x + y = 0$ og $x - y = 90^0$, hvoraf $x = 45^0$, $y = -45^0$, altsaa Breddecirklerne beliggende 45^0 hver paa sin Side af Ækvator.

Det omspurgte Forhold $f = \frac{\frac{1}{6}\pi h k^2}{\frac{4}{3}\pi r^3}$, hvor $k = 2r\sin\frac{p}{2}$,

altsaa $$f = \frac{\sin^2\frac{p}{2}}{n}, \text{ i Ex.} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. Find Arealet af den Firkant, der begrænses af Tangenterne til Skæringspunkterne mellem de to Keglesnit, som i et retvinklet Koordinatsystem fremstilles ved Ligningerne

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ og } 2ay^2 = 3b^2x.$$

Opløsning. De reelle Skæringspunkter mellem Ellipsen og Parablen have Abscissen $x_1 = \frac{a}{2}$, Ordinaterne $\pm\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Parabeltangenternes Skæringspunkt med Abscisseaxen har Abscissen $-x_1$, Ellipsetangenternes $\frac{a^2}{x_1}$. Det søgte Areal er da

$$\frac{b\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{a^2}{x_1} + x_1\right) = \frac{5ab\sqrt{3}}{4}.$$

3. En Trekant ABC er given. Der skal konstrueres en anden Trekant $A_1B_1C_1$ med samme Areal som den givne, saaledes at $\angle A_1 = \angle A$, og at $A_1B_1 + A_1C_1$ er lig med en given Linje.

Opløsning. Af $A_1B_1 + A_1C_1 = 2l$ og $A_1B_1 \,.\, A_1C_1 = AB \,.\, AC = k^2$, ($k$ Mellemproportional mellem AB og AC), findes

$$\left.\begin{matrix} A_1B_1 \\ A_1C_1 \end{matrix}\right\} = l \pm \sqrt{l^2 - k^2},$$

som let konstrueres, og derved Trekanten $A_1B_1C_1$.

Projektionstegniug.

En regelmæssig Femkant ligger i den vandrette Billedplan foran den lodrette; en af dens Sider er vinkelret paa Skæringslinjen mellem Billedplanerne. Tegn Billederne (Projektionerne) af det regelmæssige Flerplanslegeme (Polyeder), i hvilket den givne Femkant er en af Sidefladerne.

Beregningsopgave.

I en konveks indskrivelig Firkant ABCD forholde AB, BC og AC sig som $(\sqrt{3}-1) : 2 : \sqrt{6}$, og Arealet af Trekanten ACD er dobbelt saa stort som Arealet af Trekanten ABC.

Beregn Firkantens Vinkler.

Opløsning. Man kan sætte $AB = \sqrt{3} - 1$, $BC = 2$, $CA = \sqrt{6}$ og faar da

$$\cos B = -\frac{1}{2}, \qquad B = 120^{0},\ D = 60^{0}.$$

$$\cos BCA = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad BCA = 15^{0}.$$

$$\cos BAC = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad BAC = 45^{0}.$$

$$\triangle\, ABC\text{'s Areal} = \frac{1}{2}\, AB \,.\, BC \,.\, \sin B = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Kaldes Vinklerne DAC og DCA x og y, er

$$\triangle\, ADC\text{'s Areal} = \frac{3 \sin x \sin y}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}.$$

Desuden er $\qquad x + y = 120^{0}.$

Den første Ligning omskrives til

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = \sqrt{3} - 1,$$

$$\cos(x-y) = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

hvoraf $x - y = 76^0\,34'\,55''$ à $56''$,
altsaa $x = 98^0\,17'\,28''$, $y = 21^0\,42'\,32''$
og enten $C = 113^0\,17'\,28''$, $A = 66^0\,42'\,32''$;
eller $C = 36^0\,42'\,32''$, $A = 143^0\,17'\,28''$.

(P. T. F.)

Fire afsluttende Noter.

(Af Chr. Hansen.)

---

1. Angaaende det i mine Artikler en temmelig underordnet Rolle spillende Spørgsmaal, om det er tilladeligt at betragte ∞ som Rod i den behandlede Ligning, skal jeg indskrænke mig til at henvise til Ramus's elem. Algebra Side 148, hvor analoge Tilfælde forekomme.

2. Hvad der kan »ventes eller forlanges af Examinanderne« til denne eller hin Examen, ere Spørgsmaal, som det ligger udenfor mine Artiklers Hensigt at lokke under Debat, og dette saa meget mere, som Erfaring jævnligt med større eller mindre Tidsmellemrum viser, at Opgavestillerne ikke ere enige med Flertallet af os Lærere om, hvad der med Billighed kan bydes Eleverne til Examen (jfr. Maanedsskrift for elementær Mathematik 1888 Side 50—52).

3. Naar en Opgave lyder: »Find x af Ligningen

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b,$$

specielt antages $a = b$«, saa gaar jeg ud fra,

[1]) at a og b ere *hvilke som helst* givne Tal, da der ikke i Opgaven er sagt, at de skulle tages i nogen som helst indskrænkende Betydning,

[2]) at man skal finde de Værdier af x, der tilfredsstille Ligningen i *den fulde Almindelighed*, hvori den foreligger,

[3]) at man derefter skal undersøge, hvad der kommer ud af at sætte $a = b$ saa vel i *Ligningen* som i den fundne *almindelige Opløsning.*

Holder jeg mig nu redeligt til Kvadratrodens Definition, da kommer jeg redeligt fra Opgavens Løsning saa vel i den fulde Almindelighed, hvori Opgaven først er forelagt, som i det specielle Tilfælde, idet jeg uden at berøve de givne Størrelser deres fulde Almindelighed, lader Ligningen afgjøre, for hvilken Kombination af Kvadratroddernes Værdier den tilfredsstilles (jfr. Jul. Petersens Arithm. og Alg. II Side 46 Lin. 21—23). Men vedtager jeg at tillægge Rodtegnet kun den ene af dets Værdier, enten den positive eller den negative, da kommer jeg til at gjøre, hvad jeg har tilladt mig at kalde interessante Opdagelser, idet jeg da for det første ser, at man maa have henholdsvis enten a positiv og b negativ eller a negativ og b positiv, for at Opløsningen kan tilfredsstille Ligningen eller virkelig være en Opløsning; altsaa Opløsningen tilfredsstiller ikke Ligningen, som denne i fuld Almindelighed foreligger, og jeg tør derfor ikke sige, at »den almindelige Opløsning tilfredsstiller virkelig den forelagte Ligning, saafremt o. s. v.«, da Ordene »almindelige« og »saafremt« modsige hinanden. Men der er endnu mere at bemærke ved denne Opgave, naar den tvinges ind under Vedtægten, idet nemlig den de givne Størrelser paatvungne Begrænsning medfører, som af mig Side 20 Lin. 12—13 og af min Kollega Side 44 Lin. 17—20 bemærket, at det specielle Tilfælde a = b ikke er indbefattet iblandt de almindelige, hvis Mulighed Opgaven tilsteder uden for den eneste bestemte Talværdi b = 0 (= a). »Det interessante ved« disse Følger af en ualgebraisk Omgang med en algebraisk Definition formaar jeg dog ikke saa let som min Kollega at faa til at »bortfalde«.

4. At det kun har formel Interesse, om Entydigheden tillegges $\sqrt{a^2}$ eller $(a^2)^{\frac{1}{2}}$, — hvis man i dette Valg fra først til sidst er konsekvent, — staar fra min Side (om end lidt betingende) indrømmet i min sidste Artikels sidste Stykke; men at man først definerer $\sqrt{a^2}$ som tvetydig, derefter

vedtager den som entydig og atter (i Ligninger) anerkjender den som tvetydig, det kan, som af mig alt antydet, ikke blot berede »en Faldgrube for mangen mindre tænksom Discipel og forskaffe ham højst uskjønne Resultater« men endog bringe mangen mere tænksom Lærer til det uskjønne Resultat at modsige sig selv, og det er dog hverken logisk eller »pædagogisk forsvarligt«.

Bemærkning af Redaktionen.

Idet vi i det hele udtale vor Tilslutning til den i Hr. Chr. Hansens Artikler fremsatte Kritik, skulle vi som vor Mening udtale, at de anførte Vanskeligheder ville undgaas, naar man lader Arithmetiken for hvert Slags Tal udgjøre et afsluttet Hele for sig og ikke blander dem sammen.

Saalænge vi ere i de positive Tals Arithmetik, som naturligvis bliver den første, er der ingen Flertydighed. $\sqrt[m]{a}$ er da det Tal, hvis m^te^ Potens er a; $x^m = a$ giver $x = \sqrt[m]{a}$.

I Læren om negative Tal se vi derefter, at ogsaa m^te^ Potens af $-\sqrt[m]{a}$ er a, hvis m er lige. $x^m = a$ giver $x = \sqrt[m]{a}$, naar m er ulige, men $x = \pm\sqrt[m]{a}$, naar m er lige. $\sqrt[m]{-a}$ er $-\sqrt[m]{a}$, naar m er ulige, men »kan vi ikke«, naar m er lige.

Endelig lære vi i de komplexe Tals Arithmetik, at der existerer m Tal (positive, negative, komplexe), hvis m^te^ Potens er a. Læren herom kan naturligvis ikke medtages i et elementært Kursus. I dette behøves heller ikke den brudne Exponent, som da slet ikke bør indføres. I det højere Kursus er det hensigtsmæssigt at have en almindelig Betegnelse for et vilkaarligt af de m Tal, hvis m^te^ Potens er a. Dertil kan gjerne bruges $a^{\frac{1}{m}}$, thi at vare sig for de ukomplette Ligninger, der kunne frem-

komme ved at regne med denne Størrelse efter de almindelige Potenssætninger, frembyder ingen Vanskelighed for dem, der ere naaede saa langt i det mathematiske Studium.

At vi anse det for, om ikke nødvendigt, saa dog hensigtsmæssigt at beholde Betegnelsen $\sqrt[m]{a}$ som det principale er ikke af Hensyn til dem, der skulle lære den, men af Hensyn til dem, der have lært den. Vi ved jo alle, hvormegen Konfusion f. Ex. en Ombytning af Mønt-, Maal- eller Vægt-system fremkalder, selv paa Steder, hvor man ikke skulde vente det. En lignende Konfusion vilde næppe undgaas, hvis Betegnelserne $\sqrt[m]{a}$ og $a^{\frac{1}{m}}$ skulde ombyttes, og det er jo aldeles ingen nødvendig Foranstaltning. En Deling af Arithmetiken, saaledes at den gjøres færdig for hvert Slags Tal for sig, vil derimod ikke fremkalde nogen Konfusion, men tværtimod ikke blot af Hensyn til ovenanførte, men af mange andre let indlysende pædagogiske Grunde være særdeles anbefalelsesværdig.

P. T. F.

Løste Opgaver.

6: α er et komplex Tal; for hvilke Værdier at x vil Udtrykket $\frac{\alpha - ix}{\alpha + ix}$ være rent imaginært?

Opløsning. Om man skrifver

$$\alpha = \beta\cos\gamma + i\beta\sin\gamma; \quad x = y\cos v + iy\sin v,$$

kan bråket omskrifvas så:

$$\frac{\beta\cos\gamma + y\sin v + i(\beta\sin\gamma - y\cos v)}{\beta\cos\gamma - y\sin v + i(\beta\sin\gamma + y\cos v)}.$$

Genom att förlänga det med nämnaren med $-i$ för $+i$ bringar man det till formen:

$$\frac{\beta^2 - y^2 - 2i\beta y\cos(\gamma - v)}{\beta^2 + y^2 + 2\beta y\sin(\gamma - v)}.$$

Skall detta vara rent imaginärt, måste $\beta = y$, d. v. s. modylerna för x og α skola vara lika.

Bråket blir då $-i \dfrac{\cos(\gamma - v)}{1 + \sin(\gamma - v)}$.

Man har t. ex. mod. $(60 + 25i) = \text{mod.}(52 + 39i) = 65$; också är

$$\frac{60 + 25i - i(52 + 39i)}{60 + 25i + i(52 + 39i)} = -\frac{9i}{7}.$$

(J. R. Åkerlund.)

10. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{x^2 + bx + 1} + \sqrt{x^2 + cx + 1} = 0.$$

Opløsning. Bortskaffes Rodstørrelserne og ordnes, faas

$$3x^4 + 2(a + b + c)x^3 - [(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) - 6)]\, x^2$$
$$+ 2(a + b + c)x + 3 = 0,$$

hvoraf, idet $a + b + c$ sættes lig α og $ab + bc + ca$ lig β,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{3}\alpha\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3}(\alpha^2 - 4\beta) = 0,$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - 3\beta}}{3}$$

$$x = \frac{-\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - 3\beta} \pm \sqrt{5\alpha^2 - 12\beta - 36 \mp 4\alpha\sqrt{\alpha^2 - 3\beta}}}{6}.$$

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af Sophus Hansen.)

11. Bestem de 6 Værdier af

$$(10 \pm 9\sqrt{-3})^{\frac{1}{3}}$$

Opløsning. De 6 värdena kunna väntas hafva formen $a \pm b\sqrt{-3}$. Man skulle då få

$$a^3 \pm 3a^2b\sqrt{-3} - 9ab^2 \mp 3b^3\sqrt{-3} = 10 \pm 9\sqrt{-3}$$

$$\therefore \quad a^3 - 9ab^2 = 10 \qquad (1)$$

$$a^2b - b^3 = 3 \qquad (2)$$

Ur (2) erhålles $\quad a^2 = \dfrac{3 + b^3}{b}. \qquad (3)$

Insättes detta i (1), kan denna skrifvas:

$$a\left(\frac{3 + b^3}{b} - 9b^2\right) = 10$$

$$\therefore \quad a = \frac{10b}{3 - 8b^3}.$$

Insättes dette i (3) och man gör liknämnigt, erhålles

$$64b^9 + 144b^6 - 235b^3 + 27 = 0,$$

hvilket man lätt ser kan omskrifvas till

$$(4b^3 + 3)^3 = 343b^3.$$

Då vi förutsätta, att b är reel, gir detta

$$4b^3 + 3 = 7b \qquad (4).$$

En rot till (4) ser man genast vara $b = 1$. Genom att omskrifva (4) så:

$$4b^3 - 7b + 3 = 0$$

och dividere med $b - 1$, erhålles ock

$$4b^2 + 4b - 3 = 0,$$

hvaraf man finner de öfriga två värdena $b = \frac{1}{2}$ och $b = -\frac{3}{2}$.

De tre motsvarande värdena på a blifva -2, $\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

Sålunda blifva de 6 värdena:

$$-2 \pm \sqrt{-3},$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

$$-\frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}.$$

(J. R. Åkerlund.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen.)

12. Skaf Brøken $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}$ rational Nævner.

Opløsning. Multipliceres i Tæller og Nævner med $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ faas Nævneren $2 - \sqrt[3]{2^2}$; og da $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, vil Brøken dernæst ved Multiplikation i Tæller og Nævner med $2^2 + 2\sqrt[3]{2^2} + (\sqrt[3]{2^2})^2$ faa Nævneren $2^3 - (\sqrt[3]{2^2})^3 = 4$.

Resultatet bliver (efter Forkortn.) $\frac{(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2})(2 + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2})}{2}$.

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af J. R. Åkerlund og C. Andersen.)

13. Konstruer en Firkant, i hvilken et Par modstaaende Vinkler ere ligestore, af Siderne.

Opløsning. $\angle B = \angle D$. Multipliceres Siderne i Trekant ADC med BC : AD, og lægges Trekanten om i Stillingen CBA_1, falder BA_1 ud ad BA. Trekant ACA_1 kan da konstrueres af BA, BA_1, BC og Forholdet $A_1C : AC$, hvorefter B og D let bestemmes.

(J. C. Carlsen.)

14. I et Cylinderglas med Vægt V^{gr}, hvis indre Diameter er k^{cm} og hvis Tyngdepunkt ligger i Højden h^{cm} over Bunden, hældes Vædske af Vægtfylde d. Tyngdepunktet vil derved først synke, senere atter stige; dets laveste Stilling ønskes bestemt.

Opløsning. Er Vædskens Højde h_1^{cm} og Tyngdepunktets Beliggenhed x^{cm} over Bunden faas Proportionen

$$\frac{x - \frac{1}{2}h_1}{h - x} = \frac{V}{\frac{1}{4}\pi k^2 h_1 d}, \text{ hvoraf}$$

$$h_1 = x \pm \sqrt{x^2 + \frac{8V}{\pi k^2 d}x - \frac{8hV}{\pi k^2 d}};$$

da Størrelsen under Rodtegnet maa være $\geqq 0$ og $x > 0$, faas Minimum for x lig

$$\frac{-4V + \sqrt{16V^2 + 8V \cdot \pi k^2 h d}}{\pi k^2 d}.$$

Tyngdepunktet ligger i saa Tilfælde i Vædskens Overflade.

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af C. Andersen.)

16. Udtryk Forholdet

$$\frac{\sin^2 x + \sin x \sin y \cos(x+y)}{\sin^2 y + \sin x \sin y \cos(x+y)}$$

alene ved tang x og tang y.

Opløsning. Forholdet er

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \sin y (\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{\sin^2 y + \sin x \sin y (\cos x \cos y - \sin x \sin y)}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1 - \sin^2 y) + \sin x \sin y \cos x \cos y}{\sin^2 y (1 - \sin^2 x) + \sin x \sin y \cos x \cos y}$$

$$= \frac{\sin^2 x \cos^2 y + \sin x \sin y \cos x \cos y}{\sin^2 y \cos^2 x + \sin x \sin y \cos x \cos y}$$

$$= \frac{\sin x \cos y (\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{\sin y \cos x (\sin y \cos x + \sin x \cos y)}$$

$$= \frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y.$$

(p + t.)

(Ogsaa løst af Ansgar Guldberg, Carl Andersen og P. R. Petersen.)

17. Find Rødderne i Ligningen

$$x^4 = \frac{7x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 7x + 7}.$$

Opløsning. Skrives ligningen:

$$2x^6 - 7x^5 + 7x^4 - 7x^2 + 7x - 2 = 0,$$

ses strax at $+1$ og -1 ere rødder i samme; herved reduceres ligningen til:

$$2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0,$$ hvis resolvent

er $$16y^3 - 36y^2 + 33y - 13 = 0.$$

Ved dennes hjælp findes 4de gradsligningen at reducere sig paa følgende to 2den gradsligninger:

$$x^2 - x + 1 = 0, \quad x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0,$$

hvis rødder henholdsvis er:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad x = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

De søgte rødder ere saaledes:

$$x = 2,\ x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},\ x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

(Ansgar Guldberg.)

(Ogsaa løst af Carl Andersen.)

Opgaver til Løsning.

22. I et femcifret Tal er midterste Ciffer harmonisk Mellemproportional mellem de to yderste og Middeltal for de to øvrige Cifre. Differensen mellem det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden, og Tallet er 35937. Find Tallet.

(Novalni.)

23. Et fircifret Tal er deleligt med 7 og 37; multipliceres det med 32, vil det derved fremkomne Tal ved Division med 29 give 24 til Rest. Find Tallet.

(J. Byskov.)

24. I a Fods Afstand fra en Kugles Overflade kan man overse $\frac{1}{42}$ mere af den end i b Fods Afstand. Hvor stor er Kuglens Radius? Ex. $a = 480'$, $b = 396'$.

(Samme.)

Korrespondance.

Spørgsmaal: »Kan man konstruere et Trapez af de to ikke parallele Sider samt de to Diagonaler, og i saa Tilfælde hvorledes?

(E—u.)

Svar: Trapezet være ABCD, AB og CD de g. Sider. Træk CE $\neq$ AB og CF $\neq$ BD. De geom. Steder for A, E, D og F ere 4 koncentriske Cirkler med C som Centrum. Opgaven er da reduceret til at trække en Linie, der skærer disse Cirkler i A, E, D og F, saaledes at AE = DF. Denne Opg. med Løsn. findes i Jul. Petersens »Meth. og Theor. etc«, 2den Udg. Opg. Nr. 142.

Svar til C. M. Den paagældende Lign. har, idet f. Ex. a betragtes som ubekendt, b som bekendt, 4 Rødder, nemlig $a = b$ og 3 andre. Kun for den første gælder naturligvis $\frac{a}{b} = 1$.

Svar til P. R. Petersen. Er p et Primtal, N et Tal $> p$, findes Antallet n_1 af Tal mindre end N, der ere delelige med p (p, 2p, 3p...) ved at dividere p ind i N; Antallet n_2 af Tal $< N$, delelige med p^2, ved at dividere p ind i den ved den foregaaende Division fremkomne Kvotient o. s. v. Produktet $1 . 2 . 3 \ldots N$ er da deleligt med $p^{n_1 + n_2 + \cdots}$ Er nu $N = a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_{m-1} p + a_m$, bliver

$$n_1 = a_0 p^{m-1} + a_1 p^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$
$$n_2 = a_0 p^{m-2} + a_1 p^{m-3} + \ldots + a_{m-2}, \text{ etc.}$$

Herved løses den omspurgte Opgave let.

Svar til Carl Andersen. Deling i yderste og mellemste Forhold = Højdeling.

Danske Examensopgaver.

Søofficersskolens Overgangsprøve*) 1890.

(Løsningerne ved Opgavestilleren.)

---

1. I en sphærisk Trekant ABC er givet Siderne AB $= 56^0\ 8'\ 12''$, BC $= 62^0\ 9'\ 20''$, CA $= 73^0\ 42'\ 28''$. Find Højderne (Storcirkelbuerne fra Vinkelspidserne vinkelrette paa de modstaaende Sider).

Opløsning. Ved Benyttelse af Formlerne

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\beta)\,.\,\sin(s-\gamma)}{\sin s\,.\,\sin(s-\alpha)}} \quad \text{o. d. anal.}$$

findes $A = 67^0\ 3'\ 6''$; $B = 88^0\ 25'\ 2''$; $C = 59^0\ 51'\ 26''$.

Dernæst $\quad \sin h_a = \sin\gamma \sin B = \sin\beta \sin C,$

hvoraf $\quad h_a = 56^0\ 6'\ 13''\ (20'')$

og analogt $\quad h_b = 49^0\ 52'\ 33''\ (38'')$

$\quad h_c = 62^0\ 6'\ 50''.$

2. I en plan Trekant er givet: Summen af 2 Sider $b + c = 20'$, den mellemliggende Vinkels Halveringslinie $v_A = 4{,}5'$ og Arealet $T = 22{,}5^{\square'}$.

Find Siderne og Vinklerne.

Opløsning. $\sin\frac{A}{2} = \frac{2T}{v_A\,(b+c)} = \frac{1}{2}$, $A = 60^0$.

$$bc = \frac{2T}{\sin A} = 30\sqrt{3}.$$

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = 10 \pm \sqrt{100 - 30\sqrt{3}} = \left\{\begin{matrix} 16{,}9307 \\ 3{,}0693. \end{matrix}\right.$$

$$a \sin\frac{1}{2}(B - C) = (b - c)\cos\frac{A}{2}$$

$$a \cos\frac{1}{2}(B - C) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$$

give $\quad \frac{1}{2}(B - C) = 50^0\ 12'\ 17''$, $a = 15{,}624$.

altsaa $\quad B = 110^0\ 12'\ 17''$, $C = 9^0\ 47'\ 43''$.

---

*) Opgaverne til Afgangsprøven ville findes i et senere Nr. af Tidsskriftets Afdeling B.

3. I et Punkt A paa Omkredsen af en Cirkel med Radius r er oprejst en Vinkelret $AT = 2r$ paa Cirklens Plan, og T er taget til Toppunkt for en Kegle med Cirklen til Grundflade. Det til A diametralt modsatte Punkt paa Cirklen kaldes B, og Midtpunktet af Sidelinien TB kaldes M.

Bevis, at Kuglefladen over AT som Diameter skærer Keglens krumme Overflade i en Cirkel, hvis Plan er $\perp$ TB i M, ved at godtgjøre, at Skæringspunktet F mellem Kuglefladen og en vilkaarlig Sidelinie TE har ligestore Afstande fra T og B.

Find de Dele, hvori Keglens Rumfang deles af Kuglefladen.

Opløsning. $FT^2 = 4r^2 - AF^2$.

$$BF^2 = BE^2 + FE^2 = BE^2 + AE^2 - AF^2 = 4r^2 - AF^2,$$

altsaa $$FT = BF.$$

$$AM = TM = BM = r\sqrt{2}.$$

Keglen $$TAM = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} r^3.$$

Højden i Kuglesegmentet AM er $= r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$, altsaa

Segmentet $= \frac{\pi r^3}{12}(8 - 5\sqrt{2})$.

Delene ere da $$\frac{\pi(8 - 3\sqrt{2})}{12} r^3 = \pi \,.\, 0{,}31312\, r^3$$

og $$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} r^3 = \pi \,.\, 0{,}35355\, r^3.$$

4. I en Kvotientrække paa 7 Led er 1ste Led = 1 og Kvotienten $= 2 - \sqrt{3}$. Find Summen, bring den paa Formen $A + B\sqrt{3}$, hvor A og B ere hele Tal, og beregn den med 1 rigtig Decimal ved Anvendelse af Kjædebrøk.

Opløsning. $$s = \frac{1 - (2 - \sqrt{3})^7}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2911\sqrt{3} - 5041}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= 1846 - 1065\sqrt{3}.$$

$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$. Konvergenten $\frac{989}{571}$ giver

$1065\sqrt{3} = 1844{,}6$, altsaa $s = 1{,}4$.

Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt.

Juni 1890.

(Løsningerne ved Opgavestilleren.)

---

1. At konstruere en Trekant ABC ligedannet med en given, saaledes at AB og AC berøre to givne Cirkler henholdsvis i B og i C. Hvormange Opløsninger kommer der, naar de givne Cirkler ligge udenfor hinanden?

Opløsning. Linien BC, som med Tangenterne danne Vinkler af given Størrelse, maa berøre Cirkler koncentriske med de givne. Hver Fællestangent giver fire Trekanter, som to og to ere ligedannede, og af hvilke de to maa være ligedannede med den givne.

2. I en Cirkel med Radius r er indskrevet en regelmæssig 2n-Kant. A, B, C ere tre efter hverandre følgende Vinkelspidser i denne. K er A's modstaaende Vinkelspids. Gjennem K trækkes en ret Linie, som skærer selve Siden AB (ikke dens Forlængelse) i et Punkt P. KP deler 2n-Kanten i to andre Polygoner, hvis Arealer forholde sig som p : q ($p > q$). I hvilket Forhold deler KP Perimetren af 2n-Kanten?

I den Figur, som dannes af de rette Linier KC og KB samt Buen BC, kan en Cirkel indskrives, som rører Figurens begrænsende Linier. Hvorledes findes et for Logarithmeregning bekvemt Udtryk for denne Cirkels Radius?

Hvor stort er Voluminet af det Legeme, som frem-

af den nævnte Figur KBC, naar hele Cirklen drejes om Diametren AK?

Opløsning. Kaldes en Centraltrekant t, AP = x, BP = y, en Polygonside s, faar man:

$$\frac{nt + \frac{x}{x+y} \cdot 2t}{nt - \frac{x}{x+y} \cdot 2t} = \frac{p}{q}, \quad x + y = s.$$

Heraf udledes det søgte Forhold

$$\frac{ns + x}{ns - x} = \frac{3p + q}{3q + p}.$$

Centrum i den Cirkel, som kan indskrives i KBC, antages at have Afstanden x fra K, Radius er da $x \sin \frac{\pi}{4n}$. Afstanden mellem Centrerne i den søgte og den givne Cirkel er

$$\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \frac{3\pi}{4n}}.$$

Derved faas:

$$x \sin \frac{\pi}{4n} + \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \frac{3\pi}{4n}} = r.$$

Heraf findes først x, derefter den søgte Radius

$$= \frac{4r \sin \frac{\pi}{4n} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\cos^2 \frac{\pi}{4n}}.$$

Det søgte Volumen er en Differens mellem det, som frembringes ved Drejning af Segmentet KB, og det, som frembringes ved Drejning af Segmentet KC.

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi r^3 \left(\cos^4 \frac{\pi}{2n} - \cos^4 \frac{\pi}{n}\right).$$

3. Find x, y, z af Ligningerne:

$$x + y + z = 1,$$
$$x \operatorname{tg} A + y \operatorname{tg} B + z \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} D,$$
$$x \operatorname{tg}^2 A + y \operatorname{tg}^2 B + z \operatorname{tg}^2 C = \operatorname{tg}^2 D.$$

De fundne Udtryk formes saaledes, at de ere bekvemme

for logarithmisk Regning. Talværdierne af x, y og z beregnes for

$$A = 60^0\,20'\,20'',\quad B = 45^0\,30'\,30'',\quad C = 30^0\,20'\,40'',$$
$$D = 15^0\,50'\,50''.$$

Derefter beregnes Koefficienterne i den Ligning af tredie Grad, hvis Rødder ere Kvadraterne af de beregnede Talværdier af x, y, z.

Opløsning. Man finder:

$$x = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 D} \cdot \frac{\sin(B - D)\sin(C - D)}{\sin(A - B)\sin(A - C)},$$

og analoge Udtryk for y og z.

Indsættelse af Talværdierne giver:

$$x = 0{,}25619,\quad y = -1{,}3096,\quad z = 2{,}1343.$$

Den kubiske Ligning bliver:

$$u^3 - 6{,}555 \cdot u^2 + 9{,}234 \cdot u - 0{,}5782 = 0.$$

4. En Parabel er givet ved sin Ligning i retvinklede Koordinater

$$y^2 = px.$$

En Trekant ABC bevæger sig saaledes, at BC bestandig gaar gjennem et fast Punkt med Abscisse a i Parablens Axe, medens AB og AC røre Parablen henholdsvis i B og C. Find det geometriske Sted

for A,

for Skæringspunktet mellem Medianerne i △ ABC og

for Skæringspunktet mellem Højderne i △ ABC.

Opløsning. Det geometriske Sted for A er Polaren til (a, o):

$$x + a = 0.$$

BC kan fremstilles ved

$$y = \alpha(x - a). \qquad (1)$$

Abscisserne ξ_2 og ξ_3 til B og C bestemmes ved

$$x^2 - (2a + \frac{p}{\alpha^2})\,x + a^2 = 0.$$

Heraf faas

$$\xi_2 + \xi_3 = 2a + \frac{p}{\alpha^2}.$$

Ordinaterne η_2 og η_3 til B og C bestemmes ved

$$y^2 - \frac{p}{\alpha} y - pa = 0,$$

som giver $$\eta_2 \eta_3 = -pa, \quad \eta_2 + \eta_3 = \frac{p}{\alpha}. \qquad (2)$$

Koordinaterne ξ_1, η_1 til A findes ved at sammenholde (1) med Ligningen for Polaren til (ξ_1, η_1):

$$\xi_1 = -a, \quad \eta_1 = \frac{p}{2\alpha}.$$

Tyngdepunktet i $\triangle$ ABC er da bestemt ved

$$X = \frac{a}{3} + \frac{p}{3\alpha^2}, \quad Y = \frac{p}{2\alpha}.$$

Tyngdepunktets geometriske Sted har da Ligningen

$$Y^2 = \frac{3}{4} p \left(X - \frac{a}{3}\right).$$

Højderne fra B og C have Ligningerne

$$y - \eta_2 = -\frac{2\eta_3}{p}\left(x - \frac{\eta_2^2}{p}\right),$$

$$y - \eta_3 = -\frac{2\eta_2}{p}\left(x - \frac{\eta_3^2}{p}\right).$$

Naar disse subtraheres, og man anvender den første (2), faas som Ligning for Højdernes geometriske Sted:

$$x = a - \frac{p}{2}.$$

Skolelærerexamen 1890.

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A sender en Ladning Rug til Norge, nemlig 635 Tdr. 2 Skpr. 2 Fdkr., kjøbt til en Pris af 34 Kr. $13\frac{1}{3}$ Øre for 2 Tdr. 5 Skpr. $1\frac{1}{3}$ Fdk., samt et andet Parti, hvoraf $\frac{1}{3}$ er kjøbt for 12,85, Resten for 12,20 Kr. pr. Tønde. Omkostningerne ved Indladningen ere 320 Kr. 92 Øre, og efter at der i Fragt

er betalt 80 Øre pr. Tønde og i Assurance $2\frac{6}{7}$ pCt. af Indkjøbspris med Fragt for begge Partier, er A's hele Udgift 16,000 Kr.

I. Af hvor mange Tønder bestod det andet Parti?

Kornet, som ved Opmaalingen i Norge viser sig at være svundet 1 Td. $2\frac{1}{2}$ Skp., sælges ved Kommissionær B. Af Salgsprisen gaaer der i Omkostninger 210 Kr., og af den Sum, der er tilbage, skal B have $3\frac{1}{3}$ pCt. og endvidere 20 pCt. af det, den overstiger 15 Kr. pr. Tønde. Naar A og B ved Handelen tjente lige meget, saa spørges:

II. Til hvad Pris solgte B 1 Tønde?

III. Hvor stor blev hvers Fortjeneste?

(Besvarelsen maa ved hver Opgave gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydeligt ses.)

Opløsning. En Tønde af det første Parti har kostet $\frac{3413\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}}$ eller 1280 Øre, af det andet i Gjennemsnit 1225 Øre, og med Fragt henholdsvis 1360 og 1305 Øre; det andet Parti har altsaa bestaaet af

$$\left[(1600000 - 32092)\frac{100}{102\frac{6}{7}} - 1360 \, . \, 635\tfrac{5}{16}\right] : 1305 = 506 \text{ Tdr.} \quad \text{(I).}$$

Der er solgt $635\frac{5}{16} + 506 - 1\frac{5}{16} = 1140$ Tdr., og kaldes Salgsprisen for x, har man

$$\frac{(x - 210)\,3\frac{1}{3}}{100} + \frac{(x - 1140 \, . \, 15 - 210)\,20}{100} = \frac{x - 16210}{2},$$

$$x = 17385 \text{ Kr.}$$

Hver Tønde er altsaa solgt for $\frac{17385}{1140} = 15\frac{1}{4}$ Kr. (II).

Hvers Fortjeneste har været $\frac{17385 - 16210}{2}$

$= 587\frac{1}{2}$ Kr. (III).

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

Der graves en cylindrisk Brønd med Diameter = $10\frac{1}{2}$ Fod. For hver Kubikfod i den første Fods Dybde betales Gravningen

med en vis Pris; i den næste Fods Dybde betales 7 pCt. mere, og fremdeles for hver følgende Fod gives et Tillæg af 7 pCt. af den foregaaende Fods Pris pr. Kubikfod.

I. Hvor dyb er Brønden, hvis hver Kubikfod i den første Fods Dybde er betalt med $5\frac{1}{3}$ Øre, og Gravningen i alt har kostet 189 Kr. $35\frac{2}{5}$ Øre?

II. Hvis Brønden er 21 Fod dyb, og dens Gravning har kostet 172 Kr. $68\frac{9}{10}$ Øre, hvor meget er da betalt for 1 Kubikfod i den første Fods Dybde? (π regnes = $\frac{22}{7}$).

Opløsning. For hver Fod, Brønden er dyb, udgraves

$$\left(\frac{21}{4}\right)^2 . 1 . \frac{22}{7} = \frac{693}{8} \text{ Kubikfod.}$$

I. Efter Formlen for Kvotientrækker har man saa

$$\frac{693}{8} . 5\frac{1}{3} . \frac{1{,}07^n - 1}{1{,}07 - 1} = 18935{,}4 \text{ Øre}$$

$$1{,}07^n = 3{,}869$$

$$n = \frac{\log 3{,}869}{\log 1{,}07} = 20.$$ Brønden er altsaa 20 Fod dyb.

II. Er x Øre Prisen for hver Kubikfod i den første Fods Dybde, har man

$$\frac{693}{8} x . \frac{1{,}07^{21} - 1}{1{,}07 - 1} = 17268{,}9 \text{ Øre}$$

$$x = \frac{5{,}233 . 8}{3(1{,}07^{21} - 1)} = \frac{41{,}864}{9{,}4194} = \text{c. } 4\tfrac{4}{9}.$$

Hver Kubikfod i første Fods Dybde har altsaa kostet c. $4\frac{4}{9}$ Øre.

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

I Femkanten ABCDE er AB = AE = $18\sqrt{3}$ Fod, $\angle$ A = $\angle$ E = 120^0, $\angle B = \angle D = 90^0$. Diagonalerne AC og BE danne en ret Vinkel med hinanden.

I. Hele Arealet søges.

II. Hvis Figuren ved en Linie, parallel med CD, skal deles

i 2 Dele, hvoraf den, der indeholder $\angle$ A, skal forholde sig til den anden som 17 til 16, hvor lang bliver da denne Linie?

(De enkelte Beregninger udføres med de irrationale Størrelser, som forekomme, og kun de endelige Resultater angives, for saa vidt de ere irrationale, med 2 Decimaler.)

Opløsning. Kaldes Diagonalernes Skæringspunkt F, faas $AF = 9\sqrt{3}$, $BF = FE = 27$, $BC = 54$ og $FC = ED = 27\sqrt{3}$. Figuren bestaar af $\triangle$ ABE og Trapezet BEDC og er altsaa lig

$$27 \cdot 9\sqrt{3} + \frac{54 + 27}{2} \cdot 27\sqrt{3} = \frac{2673}{2}\sqrt{3} = 2314{,}89 \text{ Kvadratfod.}$$

Forlænges BC og ED til Skæring i G, og kaldes den søgte Delingslinie HI har man

$$\frac{HIDC + CDG}{CDG} = \frac{HI^2}{CD^2} \text{ eller } \frac{\frac{16}{33} \cdot \frac{2673}{2}\sqrt{3} + \frac{27^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{27^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{HI^2}{27^2},$$

$$HI = 45 \text{ Fod.}$$

Geometrisk Tegning.

a ———————————————— b

I en (punkteret) Cirkel med Radius lig ab indskrives en regelmæssig (med fuld, tyk Linie trukken) Ottekant, hvis mindste Radier punkteres, medens hver af dennes Sider gjøres til Side i en udenfor Ottekanten liggende regelmæssig (punkteret) Femkant, hvis Diagonaler trækkes (med fuld, tyk Linie). Tillige tegnes med hver af Ottekantens Vinkelspidser som Centrum en Cirkel med Radius lig en af Femkantens Diagonaler (hver anden af disse Cirkler trækkes med fuld, tynd Linie, hver anden punkteres).

Projektionstegning

(for de Examinander, der maatte ønske at aflægge Prøve heri, i Stedet for i Frihaandstegning):

a ———————————— b

Et regelmæssigt 8sidet Prisme, hvis Grundflades Kant er ab, og hvis Sidekant er 4 ab, staar paa den vandrette Billedplan. Det deles i 2 Dele ved en Plan, der er vinkelret paa den lodrette Billedplan, gaar gjennem Midtpunktet af den Linie, der forbinder de to Ottekanters Centrer, og danner 45^0 med den vandrette Billedplan. De to derved fremkomne Legemer tegnes derpaa hvilende paa den vandrette Billedplan, det ene paa sin længste Sideflade, det andet paa Snittet, men begge saaledes, at ingen Kant i den hvilende Flade er parallel med Grundlinien (Projektionsaxen). De usynlige Kanter punkteres.

N. B.

Løste Opgaver.

15. Dela en qvadrat så, att delarne kunna sammanläggas till [1]) 2 qvadrater, af hvilka den ena = 2 gånger den andra — eller ock till [2]) 3 qvadrater, hvilka förhålla sig som 2 : 3 : 4.

Opløsning. Da et hvilketsomhelst Rektangel kan deles saaledes, at Stykkerne kunne sammenlægges til et Kvadrat, kan man ved $\neq$ Linier først dele det givne Kvadrat i Rektangler, hvis Arealer staa i det forlangte Forhold til hinanden eller hverandre og derefter behandle hvert Rektangel som nævnt. Vi ville tillade os at udvide Opgaven og i Almindelighed vise, hvorledes ethvert Rektangel kan deles og omlægges til et Kvadrat.

Et Rektangel ABCD, hvis Længde AB vi ville kalde a, og hvis Bredde AD vi ville kalde b, behandles saaledes:

Over Rektanglet med AB som Hypotenuse konstrueres en retvinklet Trekant AHB med den ene Kathetes Projektion = Rektanglets Bredde. HB er da $= \sqrt{ab}$. Konstrueres derefter paa HB Kvadratet HBEG, saaledes at G ligger i HA eller dennes Forlængelse, vil E ligge i DC og Kvadratet være = det søgte Kvadrat og med sin Omkreds afgive den Ra[illegible] som Rektanglets Dele skulle udfylde.

EG skærer Rektanglets Omkreds i et Punkt F, der ligger i AD, A eller AB, eftersom $2b \gtreqless a$. I alle 3 Tilfælde deles Rektanglet af BE og EF i 3 Dele. Den mellemste af dem lade vi ligge, de to andre flytte vi. △ BCE lægges med E i A og EC ud ad AB; den Fig. (i de første 2 Tilfælde en retv. Trekant, i sidste et Trapez), som har Grundlinien ED, lægges ved Siden ad den forrige paa AB, med E i B og ED ud ad BA.

Naar $2b = a$ eller Rektanglet dobbelt saa langt som bredt, er Kvadratet BEGH derved udfyldt af Rektanglets 3 Dele. Er derimod $2b > a$ eller $2b < a$ og derhos $2b \geq \sqrt{(a - b) . b}$ (Rektanglets dobbelte Bredde $\geq$ Trekantens Højde), vil en retvinklet Del komme til at ligge udenfor Omkredsen af BEGH. Afskæres denne retvinklede Del, vil den nøjagtig kunne udfylde den Plads af Kvadratet, som endnu er tilbage, og dette er saaledes sammenføjet af de Stykker, hvori Rektanglet ved 3 Snit efterhaanden er bleven delt.

Dersom $2b < \sqrt{(a - b) b}$, maa Rektanglet deles ved flere end 3 Snit. Efter at man nemlig ligesom i foregaaende Tilfælde paa AB har anbragt de 2 Dele af Rektanglet, som have DE og EC til Grundlinie, danne disse 2 Dele tilsammen et saa langt Trapez, at den udenfor Kvadratet BEGH værende Del ikke længer er en Trekant, men et mindre Trapez. Vi maa da afsætte BF ud ad BA, saa ofte det lader sig gøre (BF indeholdes lige saa mange Gange i AB som Rektanglets Bredde b i Trekantshøjden $\sqrt{(a - b) b}$), og fra Delingspunkterne F_2, F_3 . . ., maa vi drage Linier ≠ HB.

De Dele, hvori Trapezet herved bliver delt, ville da i Forening med △ BEF kunne udfylde eller dække Kvadratet BEGH, naar de lægges Side om Side indenfor dets Omkreds.

Anm. Om man vil, kan man altsaa paa haandgribelig [illegible]e den pyt[illegible]ske Læresætning ved at dele [illegible] Hyp[illegible] o Rektangler med Bredde

= Katheternes Projektioner, derefter atter dele Rektanglerne som ovenfor vist (i Regelen hvert i 4 Dele) og saa endelig lægge Delene sammen til Kvadrater paa Katheterne.

(H. Nissen.)

18. At opløse Ligningerne

$$x^3 = ax + by$$
$$y^3 = bx + ay.$$

Opløsning. Ved Addition faas

$$x^3 + y^3 = (a + b)(x + y),$$

der deler sig i

$$x^2 - xy + y^2 = a + b \ (1) \text{ og } x + y = 0 \ (2).$$

Ved Subtraktion

$$x^3 - y^3 = (a - b)(x - y),$$

hvoraf enten

$$x^2 + xy + y^2 = (a - b) \ (3) \text{ eller } x - y = 0 \ (4).$$

Af (1) og (3)

$$x^2 + y^2 = a,\ xy = -b,$$
$$x - y = \pm\sqrt{a + 2b},\ x + y = \pm\sqrt{a - 2b};$$
$$x = \frac{\pm\sqrt{a - 2b} \pm \sqrt{a + 2b}}{2},\ y = \frac{\pm\sqrt{a - 2b} \mp \sqrt{a + 2b}}{2}.$$

Af (3) og (2)

$$x = -y = \pm\sqrt{a - b}.$$

Af (2) og (4)

$$x = y = 0.$$

Af (4) og (1)

$$x = y = \pm\sqrt{a + b}.$$

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af P. Petersen.)

19. I en Firkant, hvori der kan indskrives en Cirkel, ere de to korteste Sider a og b, de modsatte henholdsvis c og d. Betegner nu ϱ Radius i Firkantens indskrevne Cirkel og ϱ_s Radius i den Cirkel, der rører Siden s og de to til s stødende Siders Forlængelser, da er

$$\frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho - \varrho_b} \cdot \frac{\varrho_d - \varrho_b}{\varrho_c - \varrho_a} = \frac{a}{b},$$

hvilket ønskes bevist.

Opløsning. Siderne b og d forlænges til Skæring; Forlængelserne kaldes x og y. Ligeledes a og c; disses Forlængelser være z og v. Man har da

$$\frac{\varrho}{\varrho_a} = \frac{x+y+a}{x+y-a}, \quad \frac{\varrho-\varrho_a}{\varrho_a} = \frac{2a}{x+y-a}, \qquad (1)$$

og analogt

$$\frac{\varrho-\varrho_b}{\varrho_b} = \frac{2b}{z+v-b}. \qquad (2)$$

$$\frac{\varrho_d}{\varrho} = \frac{z+v+a+c+d}{z+v+b}, \quad \frac{\varrho_d}{\varrho_b} = \frac{z+v+a+c+d}{z+v-b},$$

$$\frac{\varrho_d-\varrho_b}{\varrho_b} = \frac{a+b+c+d}{z+v-b}, \qquad (3)$$

og analogt

$$\frac{\varrho_c-\varrho_a}{\varrho_a} = \frac{a+b+c+d}{x+y-a}. \qquad (4)$$

Af (1), (2), (3) og (4) udledes let den angivne Relation.

(Carl Andersen.)

(Ogsaa løst af P. Petersen, J. C. Carlsen og Sophus Hansen.)

20. Naar r_A, r_B, r_C betegne Radierne i de Cirkler, der kunne omskrives om de tre Firkanter, hvori en Trekant deles ved Højderne, da er

$$\frac{r_B\, r_C}{bc} + \frac{r_C\, r_A}{ca} + \frac{r_A\, r_B}{ab} = \frac{1}{4},$$

hvilket ønskes bevist.

Opløsning. Idet a, b, c baade betegne Siderne og Højdernes Fodpunkter, faas

$$\frac{2r_A}{a} = \frac{Ab}{Bb} = \cot A, \quad \frac{2r_B}{b} = \frac{Bc}{Cc} = \cot B,$$

$$\frac{2r_C}{c} = \frac{Ca}{Aa} = \cot C, \text{ altsaa}$$

$$\frac{r_B\, r_C}{bc} + \frac{r_C\, r_A}{ca} + \frac{r_A\, r_B}{ab}$$

$$= \frac{1}{4}\,(\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B)$$

$$= \frac{1}{4}\,[\cot A \cot B - \cot(A+B)(\cot A + \cot B)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{1}{4}.$$

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af Carl Andersen og Sophus Hansen.)

22. I et femcifret Tal er midterste Ciffer harmonisk Mellemproportional mellem de to yderste og Middeltal for de to øvrige Cifre. Differensen mellem det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden, og Tallet er 35937. Find Tallet.

Opløsning. Kallas de fem siffrorna i ordning u, v, x, y och z, erhållas eqvationerna:

$$x = \frac{2uz}{u+z} = \frac{v+y}{2},$$

$$10000z + 1000y + 100x + 10v + u - (10000u + 1000v + 100x + 10y + z) = 35937.$$

Den sista kan genom sammanslagning af termer och division med 99 förenklas till

$$101(z-u) + 10(y-v) = 363.$$

eller
$$101(z-u-3) = 10(6-y+v).$$

Den kan tydligen endast satisfieras af

$$z = u + 3 \text{ och } y = 6 + v.$$

Insättes detta i de första eqvationerna, blifva dessa:

$$x = \frac{2u(u+3)}{2u+3} = v + 3.$$

Då här förekommande bråkuttryck måste kunna förkortas till helt tal, måste $u = 3$. Häraf följer $x = 4$, $v = 1$, $y = 7$, $z = 6$. Talet är således

31476.

(J. R. Åkerlund.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen og A. Juel.)

23. Et fircifret Tal er deleligt med 7 og 37; multipliceres det med 32, vil det derved fremkomne Tal ved Division med 29 give 24 til Rest. Find Tallet.

Opløsning. Talet skall enligt uppgiften

äfven med 259 och kan således betecknas med 259x, der x = helt tal. Kallas qvoten y vid den i uppgiften nämda divisionen, skall man sålunda hafva:

$$32 \,.\, 259x = 29y + 24,$$

hvilket ger $$y = 286x - \frac{6\,(x+4)}{29}.$$

Således måste x + 4 vara en mångfald af 29; man kan då skrifva

$$x = 29z - 4,$$

således äfven $$y = 8288z - 1144.$$

Största och minsta fyrsiffriga tal, som är delbart med 29, äro 9842 och 1036. Då kunde x variera från 38 till 4. Men af ofvanstående uttryck ser man, at z = 1 endast och sålunda

$$x = 25, \; y = 7144.$$

Talet är då: 6475.

(J. R. Åkerlund.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen og A. Juel.)

Opgaver til Løsning.

25. Hvilket 3-cifret Tal i Titalsystemet skrives i Syvtalsystemet med de samme 3 Cifre?

(P. A. Larsen.)

26. a) En Cirkelperiferi er delt i n ligestore Dele. Fra Delingspunkterne trækkes parallele Korder i en vilkaarlig Retning. Vis, at Summen af de Korder, der trækkes den ene Vej er lig Summen af dem, der trækkes den modsatte Vej.

b) To ligestore Cirkler have Centerlinjen c. Den ene Cirkel er ved n Punkter delt i n ligestore Dele. Vis, at Summen af Punkternes Potenser med Hensyn til den anden Cirkel er nc^2.

(Åsted.)

27. En Mand ejer et firkantet Stykke Jord ABCD, ...rne A og B ere rette samt DA = 167', AB = 140'

og BC = 62'. Denne Jord udstykker han ved en ret Linje EF i to Byggegrunde AEFD og EBCF saaledes, at $\frac{AE}{BE} = \frac{2}{5}$ og $\frac{CF}{FD} = \frac{3}{1}$. Af disse Byggegrunde sælger han den første til 80 Øre for hver Kvadratfod og den sidste til 1 Kr. 20 Øre dito. Hele Summen bliver ham dog ikke udbetalt strax, men med Renter beregnede til 2 Procent halvaarligt i Løbet af 10 Aar med et og samme Beløb fjerdingaarligt. Hvor stor en fjerdingaarlig Indtægt har han da i den Tid af sin Jord?

28. I Parallellogrammet ABCD ligger et Punkt P saaledes, at $\angle APB + \angle CPD = 180^0$. Bevis, at

$$PA . PC + PB . PD = AB . BC.$$

29. Find Fladeindholdet af et Snit lagt igjennem Midtpunkterne af tre parvis sammenstødende Kanter i et regelmæssigt tresidet Prisme, hvis Højde er h og hvis Endeflades Side er k.

(Nr. 27—29 af Chr. Hansen.)

Korrespondance.

Svar til A. Juel: »Mathematiske Opgaver til Afslutning af det elementære Kursus ved Adolph Steen« er forsynet med Løsninger og kan bruges ved Forberedelsen til polyt. Adgangsexamen. Nogen Samling af Examensopgaver med Løsninger findes saavidt os bekendt ikke.

Besvarelserne af de i Tidsskriftet stillede geometriske Opgaver bedes saavidt muligt affattede saaledes, at det kan overlades til Læseren selv at tegne Figur.

Rettelse.

S. 26 f. n.: $\frac{a_1 + a_2}{2}$ læs $\frac{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}}{2}$.

Norske Examensopgaver.

Realartium 1890.

1. Der er givet en spids Vinkel φ med Toppunkt T. Paa det ene Ben er der efter hinanden afsat følgende Stykker:

$$TA_1 = a,\ A_1 A_2 = 2a,\ A_2 A_3 = 3a \ldots\ldots$$
$$A_{n-1} A_n = na.$$

I Punkterne $A_1, A_2 \ldots . A_n$ er der oprejst Perpendikulærer paa Vinkelbenet; disse skjærer det andet Ben henholdsvis i $B_1, B_2 \ldots . B_n$.

Søg Arealet af Trapetset $A_{n-1}\ B_{n-1}\ B_n\ A_n$ samt den samlede Sum af alle de enkelte Arealer fra og med Trianglet $TA_1\ B_1$ til og med Trapetset $A_{n-1}\ B_{n-1}\ B_n\ A_n$. Til denne Summation benyttes Læren om højere aritmetiske Rækker. Resultatets Rigtighed prøves ved paa Figuren direkte at søge Arealet af Trianglet $TA_n\ B_n$.

Hvilken bekjendt Summationsformel faar herved et geometrisk Bevis?

Opløsning. $TA_{n-1} = a + 2a + \ldots + (n-1)\ a$

$$= \frac{n\ (n-1)\ a}{2}.$$

$$TA_n = a + 2a + \ldots + na = \frac{n\ (n+1)\ a}{2}.$$

$$\text{Trapez } A_{n-1} B_{n-1} B_n A_n = \frac{1}{2}\ an \left[\frac{n\,(n-1)\ a}{2} + \frac{n\,(n+1)\ a}{2}\right] \text{tg}\ \varphi$$

$$= \frac{1}{2}\ n^3\ a^2\ \text{tg}\ \varphi.$$

$$\text{Arealsummen} = \frac{1}{2} . 1^3 . a . a \ \text{tg}\ \varphi + \frac{1}{2} . 2^3 . a^2\, \text{tg}\,\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} . n^3\ a^2\ \text{tg}\ \varphi = \frac{1}{2}\ a^2\ \text{tg}\ \varphi . \sum_1^n n^3$$

$$= \frac{1}{2}\ a^2\ \text{tg}\ \varphi \left[\frac{n\ (n+1)}{1 . 2}\right]^2$$

$$TA_n\ B_n = \frac{1}{2}\ (a + 2a + \ldots na)^2 . \text{tg}\ \varphi$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{tg}\ \varphi . \left[\frac{n\ (n+1) . a}{1 . 2}\right]^2$$

2. Bestem algebraisk alle Værdier af cos x med tilhørende sin x, der tilfredsstiller Ligningen

$$\sin 2x + \cos^2 x = \cos x$$

og beregn derefter de tilsvarende Buer x.

Opløsning. $\sin 2x + \cos^2 x = \cos x$

$$2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos x$$

Ved division med cos x:

(1) $2 \sin x + \cos x = 1$
$\cos x = 1 - 2 \sin x,$

$\cos x = 0$
$x_1 = 90^0$
$x_2 = 270^0.$

som indsat i:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ gir:}$$

$$5 \sin^2 x - 4 \sin x = 0.$$

Ved division med sin x:

$\sin x = \frac{4}{5}$
Af (1): $\cos x = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$

Af (1): $\sin x = 0$
$\cos x = 1 - 0 = 1$
$x_3 = 0^0.$

Den hertil svarende bue maa tilhøre 2den kvadrant. log sin x = 9,90309, hvoraf x = 53^0 7', 8, altsaa:

$$x_4 = 180^0 - 53^0\,7',8 = 126^0\,52',2.$$

3. To Punkter P_1 (x_1, y_1) og P_2 (x_2, y_2), begge med positive Koordinater, er henførte til et retvinklet Axesystem med origo O.

Den rette Linie $P_1 P_2$ skjærer X-Axen i A og Y-Axen i B. Søg Stykkerne OA og OB.

Bestem dernæst et Keglesnit

$$Mx^2 + Ny^2 = 1$$

saaledes, at det gaar gjennem Punkterne P_1 og P_2.

Paavis ved at opløse de fundne Udtryk for M og N i Faktorer, at Keglesnittet kun i det Tilfælde er en Ellipse, naar begge de ovennævnte Stykker OA og OB er positive, og find denne Ellipses Axelængder.

Opløsning. Af ligningen $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

findes: $OA = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_2 - y_1}$

$OB = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$

Af $Mx_1^2 + Ny_1^2 = 1$

$Mx_2^2 + Ny_2^2 = 1$

følger $M = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}$ og $N = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}$, som indsat i $Mx^2 + Ny^2 = 1$ gir keglesnittets ligning, der fremstiller en ellipse, naar $M \,.\, N = \frac{(y_2 + y_1)(x_1 + x_2)}{(x_1 y_2 + y_1 x_2)^2} \,.\, \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x_2)}{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2} > 0$.

Da efter forudsætningen x_1 y_1 x_2 y_2 samtlige er positive, er første faktor positiv; ligesaa anden faktors nævner. Betingelsen er altsaa, at enten $y_2 > y_1$ og $x_1 > x_2$, hvoraf $x_1 y_2 > y_1 x_2$, eller $y_2 < y_1$ og $x_1 < x_2$, hvoraf $x_1 y_2 < y_1 x_2$. I begge Tilfælde er OA og OB positive.

Halvaxerne er

$$\sqrt{\frac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{y_2^2 - y_1^2}} \text{ og } \sqrt{\frac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}}.$$

Latinartium 1890.

1. Vis, hvorledes en Brøk omgjøres til en anden Benævning, og hvorledes en almindelig Brøk omgjøres til Decimalbrøk med de derunder forekommende Tilfælde. Bevis de herhenhørende Sætninger.

Find Værdien af 0,01363636 .... udtrykt som almindelig Brøk.

Opløsning. Talexemplet gir $\frac{3}{220}$.

2. Omkredsen af en Kuglesegments Grundflade er lig Kuglens Diameter. Find et Udtryk for Forholdet mellem Segmentets krumme Overflade og Kuglens Overflade og udregn dette Udtryk med 2 Decimaler.

Opløsning. $2\pi\varrho = 2r$, $h = r \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$.

$$\text{Forh.} = \frac{2\pi hr}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1}}{2\pi} = \begin{cases} 0{,}97. \\ 0{,}03. \end{cases}$$

3. Find Vinklerne i et Triangel, hvori man kjender to Sider og disse Siders modstaaende Vinklers Differents.

Exempel. $a = 63246$ m. $b = 42152$ m.

$A - B = 31^0\ 14',6$.

Opløsning. $a + b = 105398$

$a - b = 21094$.

Af
$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} \cdot (a+b)}{a-b} \text{ findes}$$

$\angle C = 71^0\ 1,'\ 2.$

Af $A + B = 180 - C = 108^0\ 58,'\ 8$

og $A - B = 31^0\ 14,'\ 6$

findes $\angle A = 70^0\ 6,'\ 7$

$\angle B = 38^0\ 52,'\ 1.$

Middelskoleexamen 1890.

(For gutter).

1. Hvor stort rum udfylder den sne, som dækker et tag, der er 5,7 m. langt, 3,8 m. bredt, naar snelagets tykkelse er 0,83 m.? Hvor stor er vægten af denne sne, naar 28 dm.^{3} af snemassen ved smeltning gir 5 l. vand? Til hvilken høide vil det vand, som man faar ved smeltning af snemassen, fylde et cylindrisk kar, hvis bund har en diameter af 2 m.? (π regnes lig 3,14).

Opløsning. $1^0 .\ 5{,}7\ \text{m} . 3{,}8\ \text{m} . 0{,}83\ \text{m} = 17{,}9778\ \text{m.}^3$.

$$2^0 .\ \frac{17977{,}8 \cdot 5}{28} = 3210{,}32 \text{ kg.}$$

$$3^0 .\ h = \frac{3{,}21032}{3{,}14} = 1{,}022 \text{ m.}$$

2. To afdelinger brandfolk fik hver til belønning for godt arbeide 300 kr. til lige deling mellem mandskaberne. Da der var 4 mand flere i den ene afdeling end i den anden, fik hver mand i den første $2^1/_2$ kr. mindre end hver mand i den anden. Hvor mange mand var der i hver afdeling?

Opløsning. Betegnes antallet af mænd i den mindste afdeling med x, faar man ligningen:

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x + 4} + 2{,}5, \text{ hvoraf } x = 20.$$

3. En mand kjøbte for laante penge 850 hl. poteter til en pris af kr. 3,60 pr. hl. 4 maaneder senere solgte han poteterne for 4 kr. pr. hl.; men $2^1/_2$ % havde taget skade og maatte kasseres. Hvormange % tjente han paa denne handel, naar han maatte betale renter af den laante kapital efter $3^1/_2$ % p. a.?

Opløsning. 850 . 3,60 = 3060 kr.

$$\frac{3{,}5 \cdot 3060}{3 \cdot 100} = 35{,}70 \text{ -}$$

Sum: 3095,70 kr.

$$850 - \frac{850 \cdot 2{,}5}{100} = 828{,}75$$ hl., der sælges for 3315 kr. Fortjeneste: 219,30 kr. Der tjenes $\frac{219{,}30 \cdot 100}{3095{,}70} = 7{,}08$ %.

4. Konstruer et trapets ABCD, hvori AB og CD er de parallele sider, og A og C er modstaaende hjørner, saaledes at siden CD er 14,5 cm., afstanden mellem siderne AB og CD 5,3 cm., diagonalen AC 10,5 cm. og afstanden fra hjørnet B til denne diagonal 3,7 cm.

Beregn trapetsets fladeindhold.

Trapetset skal derpaa omdannes til et dermed ligestort kvadrat.

Opløsning af Talopgaven:

$$\text{Tr.} = \frac{1}{2}(14{,}5 \cdot 5{,}3 + 10{,}5 \cdot 3{,}7) = 57{,}85 \text{ cm.}^2.$$

O. B.

En geometrisk Sætning.

(Af A. S. Bang).

1. Ved Løsning af geometriske Maximumsopgaver ledes man ofte til geometriske Sætninger, hvilket det Efterfølgende er et Exempel paa.

Den Maximumsopgave vi ville løse er følgende:

Om en given Trekant ABC at omskrive den størst mulige Trekant $A^1B^1C^1$, som er ligedannet med en given.

Da Vinklerne A^1, B^1 og C^1 ere givne, faar man Cirkelbuer over AB, BC og CA som Korder til geometriske Steder for den søgte Trekants Vinkelspidser. Lad Centrerne for Cirklerne være A_1, B_1 og C_1. Nedfældes C_1M og A_1N vinkelrette paa C^1A^1, faar man $MN = \frac{1}{2} C^1A^1$, saa at, da C^1A^1 skal være Maximum, man tillige maa have MN saa stor som mulig. Da nu $MN \leq A_1C_1$, faar man, at $MN = A_1C_1$ giver Maximumsstillingen, og i dette Tilfælde er $A_1C_1 \neq A^1C^1$. Man løser altsaa Maximumsopgaven ved gjennem B at trække en Parallel med A_1C_1.

2. Ligesom $A^1C^1 \neq A_1C_1$ faar man $A^1B^1 \neq A_1B_1$ og $B^1C^1 \neq B_1C_1$, og da $\angle BA_1C = 2 . \angle BA^1C$, faar man altsaa

$$\angle CA_1B = 2 . \angle C_1A_1B_1$$

og de analoge, hvilket giver følgende geometriske Sætning:

Naar paa en Trekant ABC's Sider som Grundlinier tegnes ligebenede Trekanter ABC_1, BCA_1 og CAB_1 med Topvinklerne udefter, og Summen af disse Topvinkler er 4R, da er $\angle AB_1C = 2 . \angle A_1B_1C_1$ og de analoge.

Som specielle Tilfælde af denne Sætning kan mærkes: Idet ABCDEF er en Sexkant, hvis Sider ere lige store, og i hvilken

$$\angle A + \angle C + \angle E = 4R,$$

da er $\angle ABC = 2 . \angle FBD$, $\angle BCD = 2 . \angle ACE$ og de analoge, og Sætningen:

Naar paa en Trekants Sider som Grundlinier tegnes ligebenede Trekanter udefter med Topvinkler paa 120^0, da ere disses Toppunkter Vinkelspidser i en ligesidet Trekant.

En Udvidelse.

Opgaven 26 b) lyder: To lige store Cirkler have Centerlinien c. Den ene Cirkel er ved n Punkter delt i n lige store Dele. Vis, at Summen af Punkternes Potenser med Hensyn til den anden Cirkel er nc^2. (Åsted).

Denne nette Sats kan generaliseres paa følgende Maade.

Lad $A_1, A_2 \ldots A_n$ være n vilkaarlige Punkter i Cirkelen C's Plan, og T deres Tyngdepunkt. Da er Summen af Punkterne A_i's Potenser med Hensyn til Cirklen lig n Gange T's Potens med Hensyn til samme, dertil lagt Summen af Kvadraterne af Punkterne A_i's Afstande fra T. Eller naar Punktet A_i's Potens betegnes (A_i):

$$\sum_1^n (A_i) = \sum_1^n \overline{A_iT}^2 + n\,(T).$$

Man har nemlig, naar C tillige betegner Cirkelens Centrum:

$$(A_i) = \overline{A_iT}^2 + (T) \div 2A_iT \,.\, TC \cos A_iTC,$$

hvilket gjælder ligegodt, om A_i ligger indenfor, paa eller udenfor Cirkelen,

$$\text{ɔ: } \sum_1^n (A_i) = \sum_1^n . \overline{A_iT}^2 + n\,(T)$$

$$- 2TC \sum_1^n A_iT \,.\, \cos A_iTC,$$

men det sidste Led er o, da T er Systemet A_i's Tyngdepunkt.

Foruden Hr Åsteds Sats omfatter den nærværende en Række andre specielle Tilfælde, som kunde fortjene at bemærkes. Saaledes, hvis Cirkelens Radius formindskes til 0. Man faar da:

Summen af Kvadraterne af Afstandene fra A_1, A_2 . . . A_n til et Punkt C er lig Summen af Kvadraterne af Afstandene til deres Tyngdepunkt T, dertil lagt n . $\overline{TC}^2$.

Særlig haves da ogsaa den bekjendte Egenskab, at det Punkt, hvis Afstande fra n givne Punkter har den mindst mulige Kvadratsum, er deres Tyngdepunkt.

E. H.

Endnu en Gang $\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b$.

I Tidsskriftets 2det Hefte S. 20 skriver Forfatteren af »Definition mod Vedtægt« følgende:

»Men følger man den mod Definitionen utro Vedtægt, at $\sqrt{\ }$ kun har én Værdi, nemlig den positive, da faar man gjort tre interessante Opdagelser, nemlig

1) at man med den punktligste Lydighed overfor Vedtægten ikke formaar at opfylde Befalingen »find x af Ligningen«, fordi osv.
2) at Opgaven kun i det specielle Tilfælde a = b har en Opløsning osv.«.

Dette er galt; thi Opgaven har ogsaa en Opløsning, saafremt a er positiv og b negativ; og denne Opløsning er $x = a^2 + b^2$, hvilken Forf. har indregistreret som almindelig Opløsning Nr. (2 a). Ligesom Forf. (S. 72) vil jeg nemlig gjerne gaa ud fra, at a og b kunne være hvilke som helst Tal, og det er netop derfor, at jeg ikke kan følge ham i Motiveringen, naar han S. 19 skriver, at $\sqrt{b^2} + \sqrt{a^2} = a - b$ er rigtig, naar den første Kvadratrods negative Værdi kombineres med den sidstes positive. Dette er nemlig kun rigtigt, saafremt

a og b begge ere positive; ellers er det galt. Forf. ønsker (S. 72), at Spørgsmaalet, om det er tilladeligt at betragte ∞ — Forf.'s almindelige Opløsning Nr. (1) — som Rod i Ligningen, skal spille en underordnet Rolle. Ikke desto mindre maa det være tilladt at give denne Rod en lille Vedtegning, selv om der skulde forekomme analoge Tilfælde i Ramus's elem. Algebra S. 148. Desuden er det endnu ikke blevet mig klart, hvorledes man ved umiddelbar Indsættelse i Ligningen ser, at $x = \infty$ tilfredsstiller den, naar man kombinerer de Værdier af Kvadratrødderne med hinanden, som have modsatte Tegn (S. 19); jeg kan ikke se det.

Skønt jeg ikke kan være enig med den ærede Forf. i at karakterisere disse Fejl som egentlige Selvmodsigelser, maa jeg dog indrømme ham, at det hverken er logisk eller pædagogisk forsvarligt af en Lærer at begaa dem; men det har vel heller ikke været Hensigten at lokke dem under Debat.

Septbr. 1890. Chr. Krüger.

Løste Opgaver.

21. M være Midtpunkt og C Centrum af en Cirkelbue AB, samt D fjerde Hjørne i Parallelogrammet ABCD. Vis, at en Cirkelbue om D gjennem M deler Korden AB i det yderste og mellemste Forhold.

Opløsning. AB betecknas med 2a, och den punkt, i hvilken cirkeln kring D skär AB, betecknas med O. Drag DO, DM, CA och CM, hvilken skär AB i R. Linien DP är $\perp$ AB, och AS $\perp$ CD. Emedan $\angle$ ACD $=$ $\angle$ CAB $=$ $\angle$ ABC $=$ $\angle$ CDA, så är DS $=$ SC $=$ PA $=$ AR $=$ RB $=$ a.

Vidare är

$$\overline{DM}^2 = 4a^2 + \overline{CM}^2$$
$$= 4a^2 + \overline{CA}^2$$

$$= 4a^2 + a^2 + \overline{CR}^2$$
$$= 5a^2 + \overline{DP}^2.$$

A andra sidan är

$$\overline{DM}^2 = \overline{DO}^2$$
$$= \overline{PO}^2 + \overline{DP}^2$$
$$\therefore \overline{PO}^2 = 5a^2$$
$$PO = a\sqrt{5}$$
$$AO = a(\sqrt{5} - 1).$$

H. S. B.

(A. L—n.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen og Carl Andersen.)

24. I a Fods Afstand fra en Kugles Overflade kan man overse $\frac{1}{42}$ mere af den end i b Fods Afstand. Hvor stor er Kuglens Radius? Ex. $a = 480'$, $b = 396'$.

Opløsning. Kaldes Kuglens Radius r, Kalotternes Højder h_1 og h_2, er

$$2\pi r h_1 - 2\pi r h_2 = \frac{1}{42} \cdot 4\pi r^2,\ h_1 - h_2 = \frac{r}{21};$$

endvidere er

$$r^2 = (r + a)(r - h_1) \text{ og } r^2 = (r + b)(r - h_2),$$

hvoraf

$$h_1 - h_2 = \frac{r^2}{r + b} - \frac{r^2}{r + a};$$

kombineres de to Udtryk for $h_1 - h_2$, faas Ligningen

$$r^2 + [a + b - 21(a - b)]\, r + ab = 0$$

til Bestemmelse af r.

For Exemplet faas $r = 528'$ og $r = 360'$.

(J. C. Carlsen.)

(Ogssa løst af J. R. Åkerlund, Soph. Hansen og Kr. Pedersen.)

25. Hvilket 3-cifret Tal i Titalsystemet skrives i Syvtalsystemet med de samme 3 Cifre?

Opløsning. Intet af Cifrene kan være større end 6.

Tallet maa være mindre end 343. Tallets første Ciffer kan ikke være det samme i begge Systemer.

Altsaa haves

$$100x + 10y + z = \begin{cases} \text{(I) } 49y + 7z + x \\ \text{(II) } 49y + 7x + z \\ \text{(III) } 49z + 7y + x \\ \text{(IV) } 49z + 7x + y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x < 4 \\ y \text{ og } z < 7 \end{matrix}$$

Af (I) faas $99x = 39y + 6z$; $33x = 13y + 2z = \begin{cases} 66 \\ 33 \end{cases}$

Naar Hensyn tages til Cifrenes ovennævnte Maximumsværdi, ses let, at $13y + 2z$ hverken kan være $= 66$ eller 33. Paa lignende Maade reduceres (II) og (III) in absurdum. Af

(IV) faas $93x = 48z - 9y$; $31x = 16z - 3y = \begin{cases} 93 \\ 62 \\ 31 \end{cases}$

α) $16z - 3y = 93$; $16z = 93 + 3y = 96$; $z = 6$; $y = 1$; $x = 3$. Tallet $=$ *316*. (I Syvtalsyst. 631).

β) $16z = 62 + 3y = 80$; $z = 5$; $y = 6$; $x = 2$. Tallet $=$ *265*. (I Syvtalsyst. 526). (J. Byskov.)

28. I Parallelogrammet ABCD ligger et Punkt P saaledes, at $\angle APB + \angle CPD = 180^0$. Bevis, at

$$PA . PC + PB . PD = AB . BC.$$

Opløsning. $\triangle$ APB parallelforskydes, indtil AB dækker DC, hvorved P falder i et Punkt P_1. PCP_1D er da en indskrivelig Firkant, hvor $P_1D . PC + P_1C . PD = DC . PP_1$, men $P_1D = PA$, $P_1C = PB$ og $DC = AB$, altsaa $PA . PC + PB . PD = AB . BC$. (P. A. Larsen.)

(Ogsaa løst af A. L—n.)

29. Find Fladeindholdet af et Snit lagt igjennem Midtpunkterne af tre parvis sammenstødende Kanter i et regelmæssigt tresidet Prisme, hvis Højde er h og hvis Endeflades Side er k.

Opløsning. Lad Prismets Endeflader være ABC og

$A_1B_1C_1$. Der bliver to forskjellige Tilfælde at betragte. Lad først AB, BC og CC_1 være de tre af Snittet halverede Kanter; AA_1 maa da aabenbart ogsaa halveres af Snittet, som altsaa bliver et Trapez med de parallele Sider k og $\frac{k}{2}$ og hver af de andre $= \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + h^2}$, hvoraf Højden $= \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{4} - \frac{k^2}{16}}$ $= \frac{1}{4}\sqrt{3k^2 + 4h^2}$.

Snittets Areal bliver $F = \frac{1}{2}(k + \frac{k}{2}) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3k^2 + 4h^2}$ $= \frac{3k}{16}\sqrt{3k^2 + 4h^2}$.

Er for det andet AB, BB_1 og B_1C_1 de tre Kanter, der halveres henholdsvis i P, Q og R, da skæres Forlængelsen af BC af Snittet i O, saaledes at $BO = B_1R = BP$, hvoraf $\angle BOP = \angle BPO = 30^0$; altsaa bliver, idet OP skærer AC i T, OT $\perp$ AC. Man ser heraf, at Snittet er vinkelret paa Planen ACC_1A_1. Er S dets Skæringspunkt med A_1C_1 (RS $\neq$ PT), ses, at Snittet bestaar af Rektanglet PRST og den halv saa store, ligebenede Trekant PQR. $PT = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2}\sqrt{3}$ $= \frac{k}{4}\sqrt{3}$; $TS = \sqrt{h^2 + \frac{k^2}{4}}$, idet $AT = C_1S = \frac{k}{4}$. Snittets Areal bliver $F = \frac{3}{2} \square PRST = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{k^2}{4}}$ $= 3\frac{\sqrt{3}}{16} k \sqrt{k^2 + 4h^2}$.

(P. A. Larsen.)

Opgaver til Løsning.

---

30. Naar i en Firkant med Siderne a, b, c, d, hvori en Cirkel kan indskrives, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d ere de mindste Radier i

de fire Trekanter, hvori Diagonalerne dele Firkanten, da er, idet s og s_1 ere henholdsvis Sidernes og Diagonalernes halve Sum,

$$(\varrho_a + \varrho_c)(\varrho_b + \varrho_d) = \left(\frac{2s_1 - s}{2}\right)^2,$$

hvilket ønskes bevist.

31. Af fire lige store Kugler med Radius r rører hver de andre 3. Find Rumindholdet af et om denne Kuglestabel omskrevet Oktaeder, hvis fire Flader røre hver tre Kugleflader og de øvrige fire Flader hver en Kugleflade, idet enhver af de sidst nævnte Flader er parallel med den modsatte.

32. M er et vilkaarligt Punkt i et Keglesnit med Brændpunkterne A og B. Naar nu Normalen til M skærer AB i N og Cirklen AMB i P, da er $\frac{MN}{MP} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, hvilket ønskes bevist.

33. I Firkant ABCD, hvorom en Cirkel kan omskrives, ere BC = a og CD = b de korteste Sider. Disse forlænges, indtil de henholdsvis i G og H skære Forlængelserne af c og d. Afsættes dernæst paa BD Stykket BF = DE, idet E er Diagonalernes Skæringspunkt, og betegnes Trekant ACF ved T samt de største Radier i Trekanterne DAH, ABG, BCH, CDG henholdsvis ved r_a, r_b, r_c, r_d, da er

$$\frac{1}{ar_a} - \frac{1}{br_b} = \pm \frac{T}{abcd} = \frac{1}{cr_c} - \frac{1}{dr_d},$$

hvilket ønskes bevist.

34. I en Firkant, hvori en Cirkel kan indskrives, ere de overfor hinanden liggende Siders Produkter p_1 og p_2, Diagonalernes Produkt p_3. Find Fladeindholdet.

35. I Trekant ABC er D et vilkaarligt Punkt i BC og E et vilkaarligt Punkt i CA. Træk AD og BE, der skære hinanden i F, og bevis, at Forholdet imellem Trekanterne

AFB og DFE er det samme som Forholdet mellem Trekanterne ABC og DEC. (30—35 af Chr. Hansen.)

36. Paa et Kvadrat er lagt to parallele Linier med en given Afstand, saaledes at Summen af Stykkerne indenfor Kvadratet er Maximum. Konstruer Stillingen og beregn Summen, naar Kvadratsiden er a og Liniernes Afstand b.

(A. Weis.)

37. Tre Kvotientrækker, hver paa n Led, begynde med samme Led; Kvotienterne ere x, x^2, x^3; den andens Sum er mellemproportional mellem de to andres. Find x.

(E. Valentiner.)

38. En Pyramide har et Kvadrat til Grundflade, Pyramidens ene Side er vinkelret paa Grundfladen og dannes af en ligesidet Trekant. Gjennem disse to Planers Kant lægges en Plan vinkelret paa den lige overfor liggende Side.

Søg Forholdet mellem de parallele Sider i det ud af Snitplanen skaarne Trapez og Forholdet mellem de to Stykker, hvori Pyramiden deles af Snitplanen. (P. A. Larsen.)

39. I et femcifret Tal er Tværsummen lig 5 Gange midterste Ciffer, Summen af Produkterne af to og to af Cifrene er 85 og Differensen mellem det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden, og Tallet er 41976. Find Tallet.

(Novalni.)

40. I et sexcifret Tal er Cifrene fra venstre til højre x, y, z, a, b, c. Mellem disse er følgende Relation:

$$y^2 = 5x + 10z + 3a + b + 3c.$$

Summen af Tallet og det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden er 1126730. Find Tallet. (Samme.)

41. Idet

$$(2n)^3 + (n + 1)^3 = a, \quad (2n)^3 + (n-1)^3 = b,$$

$$(2n^2)^3 + (n^2 + 1)^3 = c, \quad (2n^2)^3 + (n^2 - 1)^3 = d,$$

skal det bevises, at

$$\frac{(a + b)(c + d)}{c} = n^3 + (2n)^3 + (3n)^3,$$

$$\frac{(3n + 1)c}{a} = \frac{(3n - 1)d}{b} = (n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 + (n^2 - 1)^2.$$

42. Bevis, at $n(n + 2)(5n - 1)(5n + 1)$ er delelig med 24, naar n er et vilkaarligt helt Tal.

43. Af de to Ligninger

$$x^2 + 2x + q = 0,$$

$$(1 + q)(x^2 + 2x + q) - 2(q - 1)(x^2 + 1) = 0,$$

har den ene imaginære Rødder, naar den anden har reelle uligestore Rødder.

44. A og B ere to faste Punkter, beliggende henholdsvis paa en given Linie AA' og en given Cirkel C. En vilkaarlig Cirkel gjennem A og B skære AA' i a og C i b. Bevis, at ab gaar igjennem et fast Punkt.

45. Idet man ved R_A og R'_A betegner Radierne i de Cirkler, der røre Siderne ved A i Trekant ABC samt dennes omskrevne Cirkel, den første indvendigt, den anden udvendigt, har man

$$\frac{R_A}{R'_A} + \frac{R_B}{R'_B} + \frac{R_C}{R'_C} = 1.$$

46. Man har givet to rette Linier OR og OS samt et Punkt A paa OR. En vilkaarlig Cirkel, som rører OR i A, skærer OS i B og C; Tangenterne i B og C til denne Cirkel skære hinanden i D. At bestemme 1° Stederne for Centrerne af indvendige og udvendige Berøringscirkler i Trekanten ABC; 2° Stederne for Centrerne af den indskrevne og den udvendige Berøringscirkel til BC i Trekanten DBC.

47. D og E være Skæringspunkterne mellem den vinkelrette paa Midten af Siden BC i Trekant ABC og de vinkel-

rette oprejste i B og C henholdsvis paa AB og AC. O være Centrum, R Radius i Cirklen ABC. Bevis, at

$$OD \cdot OE = R^2.$$

48. To Cirkler skære hinanden i Punkterne A og B. En Sekant gjennem A skærer de to Kurver i C og D. Bevis, at Længden CD varierer proportionalt med sinus af Vinklen CAB.

49. De rette Linier, som forbinde Vinkelspidserne i en ligesidet Trekant ABC med et Punkt D, skære den omskrevne Cirkel i Punkterne A', B', C'. Bevis, at

$$AD \cdot AA' + BD \cdot BB' + CD \cdot CC' = 2\,\overline{AB}^2.$$

50. AOB og COD ere Diametre i en Cirkel. Bestem Vinklen AOC, naar Segmenterne AC og AD ved Drejning om AOB frembringe Voluminer, der forholde sig som $\frac{1}{3}$.

51. Man trækker Normalerne i Endepunkterne af en Korde i en Ellipse. Søg Stedet for disse Normalers Skæringspunkt, naar Korden flytter sig parallelt.

52. Søg Stedet for de Punkter, hvorfra man ser de modstaaende Sider i et Rektangel under Vinkler, der ere lige store eller Supplementvinkler.

53. Udtryk $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ ved tg x og gjør Rede for Fortegnene.

54. Følgende Udtryk gjøres logarithmisk bekvemt:

$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right);$$

A, B, C ere Vinkler i en Trekant; a, b og c de modstaaende Sider.

(41—53 Questions d'examen, 54 Question proposée; Mathesis.)

Om den indledende Geometriundervisning i de højere Skoler.

Disse Bemærkningers Fremkomst skyldes nogle Forsøg paa at afhjælpe Manglen af Hjælpemidler ved denne Undervisning, der dels er noget af det interessanteste og mest lønnende ved en Lærergjerning og dels undertiden tillægges for ringe Betydning for Mathematikundervisningen i det hele.

I Undervisningsplanen hedder det, at Geometriundervisningen skal indledes med en paa Betragtning af materielle Former støttet Abstraktion af de første geometriske Begreber, saaledes at Disciplene derved tillige føres til en saadan klar Opfattelse af Legemers, Fladers og Liniers Inddeling efter deres Frembringelsesmaade og Beskaffenhed, som uden geometriske Beviser ad Anskuelighedens Vej ved Iagttagelse af og Forsøg med legemlige Former kan opnaas.

Heri ligger saa klart et Program for den indledende Undervisning, som man kan forlange, men det skorter undertiden paa Hjælpemidler dertil.

Ved en løs Betragtning skulde man synes, at Plangeometrien maatte fra første Begyndelse falde Eleverne let og naturlig, da man har Figurer at støtte sig paa; men det viser sig hurtigt at være en Misforstaaelse, fordi Eleven netop her samtidig faar at gjøre med Begreber, som ere ham fuldstændig fremmede; men forøvrigt skal jeg ikke indlade mig videre herpaa, det er fremhævet saa ofte, at en Gjentagelse er unødvendig.

Naar nu en indledende Undervisning som ovenfor fremstillet skal drives med størst muligt Udbytte, maa man først og fremmest skaffe sig et Hjælpemiddel, hvorved Eleven selv faar Lejlighed til at se og undersøge de Former i det enkelte, som det er Meningen, at man vil lægge frem for ham. Hensigten er jo, at han skal vænne sig til at se og at opdage Særegenhederne, som udmærke den enkelte Form, han har med at gjøre, samt tillige til at kunne foretage Sammenligninger

med andre almindeligere eller specielle Former hørende til samme Gruppe, saa han faar tilstrækkelige Kjendetegn for de enkelte Former.

Han maa altsaa herved oplæres til det, som det ved den egentlige Geometriundervisning kommer an paa, nemlig at foretage en egen Undersøgelse paa en saadan Maade, at intet mangler. Derfor kræves, at man som første Hjælpemiddel skaffer Eleven selv de enkelte Former i Hænde, hvad der vel kan ske ved, at Skolen ejer en Samling, som benyttes til Demonstration i Undervisningen; men da hver Elev herved næppe faar tilstrækkelig Lejlighed til selv at undersøge hver enkelt Form omhyggeligt, er dette Hjælpemiddel ikke tilstrækkeligt, derfor maa man hellere se at skaffe en Samling Modeller i Udfoldning, som kunne udskjæres og sammenklæbes, men der maa kræves, at baade almindelige og specielle Former ere repræsenterede deri. Af saadanne Hjælpemidler findes nu tre, nemlig af A. Andresen (Vejledning til Opfattelse af Grundformerne i Rummet tillige med en kort Fremstilling af deres Udmaaling, 6 Tavler, 1863), S. A. Christensen (Hjælpemiddel til den første Geometriundervisning Pl. I + II, 1886) og A. Svendsen (Mathematikkens A B C, 1890). Det første er ved Kostbarhed og Omfang urimeligt at forde anskaffet af Eleverne, men vel egnet til Samling for Skolerne. Med det sidste følger en Række ikke altid heldige Definitioner, der senere skulle omtales, medens Figurerne ere gode, men smaa og for faa efter det Omfang, man kunde ønske givet denne Undervisning, hvad der vel kan være af underordnet Betydning. Derimod bliver det en Fejl at gjøre Figurerne saa smaa, at det bliver vanskeligt at udføre Sammensætningen af det stive Karton nogenlunde nøjagtigt. (Som Exempel skal anføres, at der blandt Figurerne findes en 12-sidet Pyramide, hvis Sidefladers Kanter ere ca. 2 ″, medens Grundlinien er $\frac{1}{8}$ ″).

Det mellemste af de omtalte Hjælpemidler omfatter Vinkelmaaler, Figurer af Trekanter, Firkanter, Mangekanter, Cirkler, de almindelige geometriske Legemer, baade ret[illegible]de, skævt-

staaende og Stubber, samt de regelmæssige Legemer, men uden nogen som helst Definition.

Andre Forfattere have taget denne Sag paa en anden Maade, idet de nemlig gaa ud fra, at Skolens Samling er tilstrækkelig, og de give da Forklaringer og Definitioner, som skulle være en Hjælp og Vejledning til at huske, hvad der fremvises paa Skolen, og tage saaledes kun Hensyn til Stoffet, der skal læres, men lægge ikke Vægt paa det Udbytte, som Eleven kan faa af Selvundersøgelsen. Endvidere fristes disse Bøger til at fjerne sig fra det skematiske, som de burde være, idet de følge Prof. Steens omfangsrige Oversigt over Hovedformerne i Rummet, 1858.

Skal Eleven ikke selv udføre alt Arbejdet, men fra Lærerens Side have nogen Hjælp, maa det ikke være ud over det allernødvendigste. De bør selv udføre alt, hvorfor jeg aldeles intet har tilføjet ud over Navnene paa de Former, Eleverne skulle beskjæftige sig med, og som bliver en eller i det højeste to i hver Time; Eleven maa da nedskrive selv, hvad han ser paa vedkommende Figur, med egne Ord, som saa blive efterset, ligesom han ogsaa maa levere en Tegning dertil. Man faar derved Eleven til at skrive, hvad han opfatter, uden Angst for at bruge Udtryk, som ikke ere fuldt korrekte, hvilke han naturligvis bliver gjort opmærksom paa. Vi vide jo alle, hvor ængstelige Eleverne ere for at fjerne sig fra en Lærebogs Udtryk, hvad der altid virker hæmmende paa Opgaveregningen. Jeg mener at kunne spore Virkningen af den her omtalte Nedskrivning i Opgaveregningen, hvor Eleverne ikke saa ofte, som før jeg benyttede den, levere Opgaver uregnede eller uden forklarende Text, fordi de ikke kunne gjøre dem færdige eller ikke vide, hvad de skulle skrive. Selv om ikke alle ville indrømme Betydningen af et halvtfærdigt Arbejde, saa maa dog alle være enige om, at Læreren derigjennem lettere overbeviser sig om Elevens Standpunkt og Arbejdsevne.

Naturligvis maa det indrømmes, at der bruges længere

Tid til denne Undervisning, end hvor man har Definitioner trykte — som hos Svendsen — eller dikterede, som enkelte Lærere bruge, eller de mere omfattende Lærebøger som S. Larsens (Geometrisk Anskuelsesundervisning, 1888) eller ældre Forfatteres. Spencers (Populær Geometri) vilde i en god Oversættelse mulig kunne anvendes, eller vel bedre en ny betydelig forkortet Bog efter samme Principer, den nuværende lader sig næppe bruge, dels paa Grund af sin Størrelse og dels for Unøjagtighederne i Texten, som jeg ikke her skal indlade mig paa at gjennemgaa.

Til denne Undervisning bruger jeg den ene af de tre ugentlige Timer, som ere indrømmede Mathematikundervisningen (Regnetimerne fraregnede) i 1ste Klasse (de øvrige Klasser har 4 Timer), men naar saa i 2den Klasse (efter Jul. Petersens Plangeometri) til regelmæssige Mangekanter uden Vanskelighed, samtidig med at de tilhørende Opgaver regnes sammen med en Del andre dels paa Skolen dels i Hjemmet, hvad der gaar betydelig lettere end tidligere.

Til de her nævnte Bøger af Larsen og Svendsen er der forskjellige Bemærkninger at gjøre, som jeg her ønsker at fremdrage. Det forekommer mig, at det er heldigst at gaa fra det specielle til det almindelige fremfor omvendt, saaledes bør man ikke udelukkende betragte Tærning som et specielt Prisme, her begaar Sv. tilmed den Uforsigtighed ikke at nævne Parallelepipedet, som dog findes blandt hans Figurer, og ikke at give en Definition af Tærningen, men kun at opstille Fordringen dertil som en Opgave. Vel skal Eleven være i Stand til at foretage en Sammenligning mellem Legemer hørende til samme Gruppe, men dels falder det ikke saa naturligt for Eleven af den almindelige Form at slutte sig til den specielle, dels tror jeg, at de specielle Kjendetegn lettere overses end den almindeligste Forms. Sammenligningen maa komme som en Oversigt, efter at de enkelte Former ere lærte.

Endvidere bruge begge Forfattere Betegnelsen ret Flade ved Siden af Plan, hvad der ikke er heldigt, da det dog maa betragtes som fastslaaet, at man benytter »Plan« i Mathematikken, saa der synes ikke at være Grund til at gaa bort derfra, navnlig ikke, naar man dernæst bruger Betegnelsen retliniet Flade for den enkelt krumme Flade, da ret og retliniet let vil kunne udsættes for Forvexling. En ligefrem stor Mangel findes hos Sv., idet han ikke foretager nogen Inddeling af de krumme Flader, men uden videre slaar Cylinderflade og Kugleflade sammen til ensartede Flader, de bør skilles ad, enten man nu vil benytte Betegnelsen halv- og helkrum, (hvor man egentlig hellere burde sige enkelt- og dobbeltkrum) eller ret- og krumliniede Flader.

Er Sv. for kortfattet, gaar L. for vidt. Sv. omtaler ikke Stubbene eller skjæve Cylindre og Kegler og medtager dem heller ikke i Figurerne, medens L. har Hjørner meget vidtløftigt, han gaar ind paa Keglesnitslinierne, Afstand mellem Planer, Projectioner og Spor, som dog ikke ere nødvendige til et indledende Kursus, man faar derved saa meget med, at Eleverne saa at sige drukne i det.

En uheldig Ordning findes hos L. med Hensyn til Kuglen, som tages før Cylinder og Kegle, hvorved Kugleudsnittet først kan omtales senere, hvor det da fremkommer som et Omdrejningslegeme frembragt af et Cirkeludsnit under Afsnittet om Omdrejning, hvor han forsøger en Systematisering, der er aldeles unødvendig paa dette Standpunkt og vanskelig for Eleven. Det vilde have simplificeret Fremstillingen først at tage Cylinder og Kegle, baade ret og skjæv, derpaa at tale om den rettes Frembringelse ved Omdrejning, hvorpaa Kuglen passende kunde faa Plads. Her skal endnu blot nævnes, at L. indfører Benævnelsen kileformet Udsnit for Kileudsnit, som dog er almindelig antaget.

En Ting, som jeg vilde sætte megen Pris paa, om man medtog den, er de regelmæssige Legemer, der mangle fuldstændig hos L., og kun ere ufuldkomment behandlede af Sv. Denne

taler om et Tetraeder, at det begrænses af 4 Trekanter, men taler ikke om, at han mener det regelmæssige, idet hans tilhørende Figur fremstiller dette, derimod er baade Oktaeder, Ikosaeder og Dodekaeder regelmæssige, dog sætter han ligesidede Femkanter for regelmæssige, et Ord han aldeles ikke benytter, og hvis Mangel er meget uheldig.

Grunden til, at jeg ønsker de 5 regelmæssige Legemer samlede medtagne, er ikke den, at de ikke kunne undværes, men den, at de give en ypperlig Anledning til at komme ind paa Geometriens Fremkomst og Udvikling, hvoraf der for den elementære Geometris Vedkommende med disse som Grundlag kan gives Eleverne en kort sammenhængende Fremstilling, saaledes at man ender det indledende Kursus med en naturlig Overgang til den egentlige Geometriundervisning, hvad der kan ske i Løbet af 2—3 Timer, der ere af megen Interesse for Eleverne, ligesom i det hele denne første Undervisning.

I det hele burde man aldrig begynde en Geometriundervisning uden at have ofret rigelig Tid paa denne Indledning. Det Pensum i Plangeometri, der skal gjennemgaas, er ikke større end, at man i 3 Aar med 2 Timer ugentlig kan naa det, ikke at tale om, at man slipper fri for Forklaringer i 4de Klasse, naar Volumen- og Overfladeformler skulle gjennemgaas, eller slipper for Forklaringer som, at et Parallelepipedum er en tyk Firkant eller andre Absurditeter, der vise Elevens fuldstændige Mangel paa Opfattelse af Rumforhold udover Planen. Ingen Elev burde paa dette Tidspunkt være ukjendt med Legemerne, og at bruge Tiden i 4de Klasse til at give Forklaringer derover, dertil er den for kostbar, selv om det kan ske i kortere Tid; dertil kommer, at mange Elever inden 4de Klasse forlade Skolen og gaa ud i det praktiske Liv, hvor han vil staa uden at kunne anvende det i Plangeometrien lærte, naar han mangler en saadan indledende Undervisning meddelt paa en fyldig Maade.

Medens jeg for den lærde Skole vil foretrække kun at benytte Modeller i Udfoldning, som hver Elev kommer til at

eje, og saa at lade Eleven selv nedskrive det nødvendige — ikke efter Diktat —, vil jeg derimod for den Skole (Borgerskolen), hvor der ikke skal meddeles nogen egentlig Mathematikundervisning, ønske, at der meddeles en saadan indledende Geometriundervisning, helst noget fyldigere end efter Svendsens, snarest i et Omfang som hos Larsen, hvor de Ting, som gaa for vidt for den lærde Skoles første Undervisning, ville være paa deres Plads og Bogen idet hele indeholde et passende afrundet Pensum. Men ogsaa for disse Skolers Vedkommende vilde det ikke være uden Nytte at medtage de regelmæssige Legemer med en Oversigt over den elementære Geometris Udvikling, hvortil man har en god Haandbog for Lærere i La Cour: Historisk Mathematik.

Da det vist maa siges, at det er Undtagelser, at Mathematiklærerne ikke under en eller anden Form meddele en indledende Undervisning i Geometri, er det maaske ikke uden Betydning at faa Opmærksomheden henledet paa de forskjellige Hjælpemidler, som man har at vælge imellem, at anbefale noget er ikke let, da hver enkelt Lærer har sine særlige Interesser og Ideer at følge; jeg har her hovedsagentlig villet skitsere min egen Undervisning, som Grundlag for mine Bemærkninger om de enkelte Hjælpemidler set fra mit Standpunkt.

S. A. Christensen,
Cand. mag.

Danske Examensopgaver.

Skolelærerexamen (extraordinær).

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A køber Rug og Byg, ialt 678 Tdr., som han sender til England. Undervejs svinder Rugen $1\frac{17}{33}$ pCt., Byggen $\frac{8}{11}$ pCt. hvorefter Tøndernes Antal forholder sig som 5 til 4.

I. Hvormange Tønder var der købt af hver Sort?

Fragten til England betaler A med 1341 Kr. Skulde han kun have betalt det Antal Tønder, der var efter Svindet, vilde hans Udgift ved Kornets Indkøb have været 126,66 Kr. mindre. Rugen sælges for 1 Lst. $6\frac{2}{3}$ sh., Byggen for 1 Lst. $2\frac{2}{9}$ sh. pr. Tønde, hvorved A tjener $21\frac{1}{3}$ pCt. af sin hele Udgift.

II. Til hvilken Pris købtes 1 Tønde af hver Sort?

(1 Lst. = 20 sh. = 17,60 Kr.)

Opløsning. Indeholder Partiet x Tdr. Rug, har man

$$98\tfrac{16}{33}\,x : 99\tfrac{3}{11}(678 - x) = 5 : 4$$

$$x = 378 \text{ Tdr.}$$

Der er saaledes købt 378 Tdr. Rug og 300 Tdr. Byg; Svindet er $5\frac{8}{11}$ Tdr. Rug og $2\frac{2}{11}$ Tdr. Byg, og der er solgt $372\frac{3}{11}$ Tdr. Rug og $297\frac{9}{11}$ Tdr. Byg.

Indkøbsprisen er

$$\left(1\tfrac{1}{3} \cdot 1760 \cdot 372\tfrac{3}{11} + 1\tfrac{2}{9} \cdot 1760 \cdot 297\tfrac{9}{11}\right)\frac{100}{121\frac{1}{3}} - 1341$$

$$= 10659 \text{ Kr.}$$

Koster en Tønde Rug x Kr. og en Tønde Byg y Kr., har man

$$378x + 300y = 10659$$

$$5\tfrac{8}{11}x + 2\tfrac{2}{11}y = 126{,}66,$$

hvoraf følger x 16,50 Kr. og y = 14,74 Kr.

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

1ste Januar 1880 har A udsat 10,000 Kr. til 4 pCt. p. A., Rente af Rente, og hver 1ste Januar i de følgende 9 Aar har han forøget Summen med 1600 Kr. Det samlede Beløb med Renter skal deles mellem hans 2 Sønner saaledes, at disse faa udbetalt ligestore Summer, men den ene skal have sin Part den 1ste Januar 1898, den anden sin den 1ste Januar 1990.

I. Hvor stor er den samlede Kapitalværdi paa det Tidspunkt, da den første Udbetaling skal finde Sted?

II. Hvor stor bliver den ligestore Udbetaling til hver Søn?

Opløsning. Om ti Aar er Kapitalværdien

$$10000\,(1{,}04)^{10} + 1600\,.\,1{,}04\,\frac{1{,}04^{9} - 1}{0{,}04} = 50000\,.\,1{,}04^{10} - 41600$$

$= 32407$ Kr.; efter 8 Aar er denne Kapital voxet til

$$32407\,(1{,}04)^{8} = 44349 \text{ Kr.} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}.$$

Bliver den første Søns Part x Kr., bliver den andens $x\,\frac{1}{1{,}04^{2}}$, altsaa:

$$x + x\,.\,\frac{1}{1{,}04^{2}} = 44349, \quad x = 23044 \text{ Kr.} \quad . \; . \quad \text{(II)}.$$

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

En Kugle med Radius = 1,75 Fod bestaar af en Kugleskal af Jærn (Vægtfylde $7\frac{4}{11}$), hvori Hulheden er fyldt med Bly (Vægtfylde $11\frac{4}{7}$). Hvor stor er Jærnskallens Tykkelse:

I. Hvis den og Blykuglen have lige stor Vægt?

II. Hvis hele Kuglen veier 11989,25 Pund?

($\pi = \frac{22}{7}$; 1 Kubikfod Vands Vægt sættes = 62 Pund.)

Opløsning. I. Kuglens Volumen $= \frac{4}{3}\,.\,1{,}75^{3}\,.\,\frac{22}{7} = 22{,}458$ Kubikfod. Jærnets og Blyets Vægtfylde forholde sig som 7 til 11, altsaa vejer $\frac{7}{18}\,.\,22{,}458$ Kubikfod Bly lige saa meget som $\frac{11}{18}\,.\,22{,}458$ Kubikfod Jærn, og altsaa er Blykuglens Radius

$$= \sqrt[3]{\frac{7\,.\,22{,}458\,.\,3\,.\,7}{18\,.\,4\,.\,22}} = 1{,}2774 \text{ Fod.}$$

Jærnskallens Tykkelse er saaledes $1{,}75 - 1{,}2774 = 0{,}4726$ Fod.

II. Kaldes Blyets Volumen x Kubikfod, har man

$$\frac{62 \cdot 81\,x}{7} + \frac{62 \cdot 81\,(22.458 - x)}{11} = 11989.25$$

$$x = 6,\,6543\ldots$$

$$\text{Blykuglens Radius} = \sqrt[3]{\frac{6{,}6543 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 22}} = 1.166\ldots \text{ Fod.}$$

Jærnskallens Tykkelse 1,75 — 1,166.. = 0,584 Fod.

Geometrisk Tegning.

Med en Diameter lig $\frac{3}{4}$ af Tegnepapirets korte Udstrækning tegnes en Cirkellinie, der deles i 15 ligestore Dele; Radierne til Delingspunkterne trækkes, og i hvert af de 15 Cirkeludsnit indskrives en Cirkel. Gennem disse 15 Cirklers Centrer tegnes en ny Cirkel og alle dennes Korder gennem to og to af de 15 Centre og svarende til Buer paa 24^0 og paa 72^0 i den sidst tegnede Cirkel.

Den førstnævnte Cirkel og alle 30 Korder trækkes op med fuld fin Linie, de 15 Cirkler med stærk Linie, det øvrige punkteres.

Skolelærerinde-Examen.

(Oktober 1890.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A køber i Brasilien 8354 Pd. Kaffe til 59,25 Øre Pundet og dernæst 2 Partier 6386 og 6260 Pd., af hvilke det sidste koster $\frac{1}{4}$ Øre mere pr. Pund end det første. Udgifterne ved Indladningen ere 643,8 Kr., og efter at A i Told har betalt 10 pCt. af den oprindelige Indkøbspris, og i Fragt 8 pCt. af samtlige før nævnte Udgifter (Indkøbspris, Ladningsomkostninger og Told), har han her Kaffen til en Gennemsnitspris af 72 Øre pr. Pund.

I. Hvad gav han for 1 Pd. af hver af de 2 sidst købte Partier?

Samtlige Udgifter udreder han ved Modtagelsen her og laaner de dertil fornødne Penge til 6 pCt. p. a. (simpel Rente). Efter $7\frac{1}{2}$ Maaned sælger han Kaffen til en saadan Pris pr. Pund, at han efter at have betalt Laanet med Renter samt 32,20 Kr. i Omkostninger har i ren Nettofortjeneste $6\frac{2}{3}$ pCt. af Salgssummen.

II. Til hvad Pris solgte han 1 Pund.

(Besvarelsen maa gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydelig ses).

Opløsning. I alt er der købt 21000 ℔; Udgiften er $72 . 21000 = 15120$ Kr. og uden Fragt $15120 . \frac{100}{108} = 14000$ Kr. Prisen paa Købestedet er altsaa $(14000 — 643,8) \frac{100}{110}$ $= 12142$ Kr. og Prisen paa et Pund af Partiet paa 6386 ℔

$$(1214200 — 59,25 . 8354 — \frac{6260}{4}) : 12646 = 56,75 \text{ Øre.}$$

og paa et Pund af det sidste Parti 57 Øre . . . . . (I).

6 pCt. p. a. bliver for $7\frac{1}{2}$ Maaned 3,75 pCt., altsaa er hvert Pund solgt for

$$(1512000 . \frac{103,75}{100} + 3220) \frac{100}{93\frac{1}{3}} : 21000 = 80,2 \text{ Øre.} \quad \text{(II).}$$

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

Af et Parti urenset Korn er $\frac{1}{3}$ kjøbt for 14,08 Kr., $\frac{1}{4}$ for 13,93 Kr., $\frac{1}{5}$ for 14,2 Kr. og Resten for 14,05 Kr., Alt pr. Tønde Efter Kornets Rensning var der 550 Tønder tilbage, som 8 Maaneder efter Købet solgtes for ialt 7202 Kr., hvorved der ved Handelen tabtes 11,5 pCt. p. a.

I. Hvormeget var Kornet svundet ved Rensningen?

Det før nævnte Salg foregik paa den Maade, at de 550 Tønder deltes i tre Partier A, B og C, af hvilke B var 10

Tønder større end A, og C dobbelt saa stort som B. Naar A solgtes for ialt 1632,80 Kr., og Salgspriserne pr. Tønde af B og C forholdt sig som 5 til 6, saa spørges:

II. Hvor mange Tønder indeholdt hvert Parti?

III. Til hvilke Priser pr. Tønde solgtes hvert?

(Besvarelsen maa gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydeligt ses.)

Opløsning. Hele Partiet har kostet $7202 \cdot \frac{100}{100 - 11{,}5 \cdot \frac{8}{12}}$ $= 7800$ Kr., og hver Tønde i Gennemsnit 14,04 Kr., altsaa er Svindet $\frac{7800 - 14{,}04 \cdot 550}{14{,}04} = 5\frac{5}{9}$ Tdr. . . . . (I).

A er 130, B 140 og C 280 Tdr. . . . . (II).

Priserne ere for A 12,56, for B $\frac{5}{17} \cdot \frac{7202 - 1632{,}80}{140}$ $= 11{,}70$ og for C 14,04 Kr. . . . . (III).

(N. B.)

Almindelig Forberedelsesexamen.

(Oktober 1890.)

Geometri.

1. I en Trekant ABC er AB = AC; BA forlænges et vilkaarligt Stykke AD ud over A, og DC trækkes. Bevis, at den Linie, der forbinder Midtpunktet af DC med Fodpunktet af Højden paa BC, er parallel med AB og halv saa stor som AC + AD.

Opløsning. Linien forbinder Midtpunkterne af Siderne CB og CD i Trekanten CBD.

2. En Cirkel rører en ret Vinkels Ben; den Trekant, der dannes af Vinkelbenene og Korden mellem Røringspunkterne, deles af Cirkelperiferien i to Dele. Find Forholdet mellem disse Deles Arealer.

Opløsning. Forholdet $= \dfrac{\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2}{r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2} = \dfrac{\pi - 2}{4 - \pi}$

$= \dfrac{4}{3}$, hvis π regnes $= \dfrac{22}{7}$.

3. Konstruer en indskrivelig Firkant ABCD af Siderne AB og BC og Diagonalen AC, naar der tillige er givet, at Trekanten ACD skal have et lige saa stort Areal som ABC.

Opløsning. Trekanten ABC konstrueres og omskrives med en Cirkel. En Linie parallel med AC i samme Afstand derfra som B, men til den modsatte Side, skærer Cirklen i D. Opgaven kan faa to Løsninger.

Arithmetik.

1. Find x af Ligningen

$$\frac{5a}{x - a^2} - \frac{2}{a + \sqrt{x}} = \frac{1}{a}.$$

Opløsning. Ligningen ordnes til

$$x + 2a\sqrt{x} - 8a^2 = 0,$$

$$\sqrt{x} = \begin{cases} 2a \\ -4a \end{cases}, \quad \text{altsaa} \quad x = \begin{cases} 4a^2 \\ 16a^2 \end{cases}.$$

Løsningen viser, med hvilket Fortegn Kvadratroden skal tages — naar $\sqrt{x}$ antages totydig — for at de fundne Værdier skulle tilfredsstille Ligningen.

2. Find x og y af Ligningerne

$$\log x + \log y = 0$$
$$\log x - \log y = 1.$$

Opløsning. $\log x = \dfrac{1}{2}$, $x = \sqrt{10}$. (entydig).

$$\log y = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

3. En Købmand købte et Parti Byg for 2706 Kr. 54 Ø. og et lige saa stort Parti Rug for 2844 Kr.; han gav 58 Øre mere for en Tønde Rug end for en Tønde Byg; hvor meget gav han for en Tønde Byg?

Opløsning. Antal Tønder i Partiet $= \frac{284400-270654}{58}$ $= 237$.

Prisen pr. Td. Byg = 11 Kr. 42 Øre.

Praktisk Regning.

1. Der skal bygges et Telt af Form som en ret Kegle, det skal være $18\frac{3}{8}$ Fod højt og have en Grundflade paa 75,46 Kvadratalen. Teltets Side skal betrækkes med Sejldug; hvor meget maa man give ud dertil, naar Sejldug koster 1 Kr. 12 Øre pr. Kvadratalen, og der gaar $4\frac{6}{11}$ pro Cent til Spilde ved Tilskæringen og Syningen?

En ret Kegles krumme Overflade er $\pi r l$, hvor r betegner Grundfladens Radius og l Keglens Sidelinie. $\pi = \frac{22}{7}$.

Opløsning. Grundfladens Radius $r = 4{,}9$ Alen.

Sidelinien $l = \sqrt{9{,}1875^2 + 24{,}01} = \sqrt{108{,}42}$ Alen.

Overfladen $O = \frac{22}{7} \cdot r \cdot l$, men da $4\frac{6}{11}$ pro Cent eller $\frac{1}{22}$ af Sejldugen gaar tilspilde, behøves der $\frac{22}{21} \cdot \frac{22}{7} \cdot r \cdot l$ Kvadratalen Dug til en Pris af

$$\frac{22}{21} \cdot \frac{22}{7} \cdot 4{,}9 \cdot \sqrt{108{,}42} \cdot 1{,}12 \text{ Kr.} = 188{,}15 \text{ Kr.}$$

2. En Kulhandler i Kjøbenhavn køber 702 Tons Kul i Newcastle og giver 9 shillings pr. Ton for den ene Tredjedel, $10\frac{1}{2}$ sh. pr. Ton for Resten. I Fragt til Kjøbenhavn betaler han $5\frac{3}{4}$ sh. pr. Ton. Paa Rejsen svinder Ladningen $\frac{1}{4}$ pro Cent. I Kjøbenhavn ere Omkostningerne ved Losningen 15 Øre pr. Tønde, og Tolden udgør 12 Øre for hver udlosset Tønde.

Naar nu Kullene sælges for 2 Kr. 70 Øre Tønden, hvor mange pro Cent tjener saa Kulhandleren paa sine udlagte Penge? Hvor mange vilde han have tjent, hvis han, Alt andet uforandret, havde købt dobbelt saa mange Kul?

1 Ton = $7\frac{1}{2}$ Tønde. 1 shilling = 90 Øre.

Opløsning. Gennemsnitspris 10 sh. pr. Ton.

Indkøbspris	sh.	7020
Fragt	sh.	4036,5
	sh.	11056,5
	Kr.	9950,85
Omkostn. + Told	Kr.	1418
Udgift	Kr.	11368,85
Indtægt	Kr.	14179,96
Fortjeneste	Kr.	2811,11.

Han tjener 24,73 % uafhængigt af det indkøbte Partis Størrelse, alt andet lige.

Løste Opgaver.

9. Find $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ af Ligningerne

$$a_1^n x_1 + a_1^{n-1} x_2 + a_1^{n-2} x_3 + \ldots\ldots + a_1 x_n = k$$
$$a_2^n x_1 + a_2^{n-1} x_2 + a_2^{n-2} x_3 + \ldots\ldots + a_2 x_n = k$$
$$a_3^n x_1 + a_3^{n-1} x_2 + a_3^{n-2} x_3 + \ldots\ldots + a_3 x_n = k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n^n x_1 + a_n^{n-1} x_2 + a_n^{n-2} x_3 + \ldots\ldots + a_n x_n = k.$$

Opløsning. For n = 1 faas $x_1 = \frac{k}{a_1}$.

For n = 2 faas $x_1 = \frac{-k}{a_1 a_2}$; $x_2 = \frac{k(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}$.

For n = 3 faas $x_1 = \frac{k}{a_1 a_2 a_3}$; $x_2 = \frac{-k(a_1 + a_2 + a_3)}{a_1 a_2 a_3}$;

$$x_3 = \frac{k(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)}{a_1 a_2 a_3}.$$

Vi slutte derfor, at

For $n = n$ faas $x_p = (-1)^{n+p} k \frac{s_{n,p-1}}{s_{n,n}}$.

($s_{n,p}$ betegner Summen af Produkterne af p og p af de n Størrelser $a_1, a_2, \ldots a_n$).

At denne Slutning er rigtig, vil vi vise ved Indsættelse af Værdierne for x'erne i en vilkaarlig, f. Ex. den rte, af de givne n Ligninger.

Vi faa da, idet den fælles Faktor $\frac{k}{s_{n,n}}$ sættes udenfor Paranthes:

$$\frac{k}{s_{n,n}} [(-1)^{n-1} a_r^n - (-1)^{n-1} a_r^{n-1} . s_{n,1} + (-1)^{n-1} a_r^{n-2} s_{n,2} - \ldots + (-1)^{2n-3} a_r^2 s_{n,n-2} + (-1)^{2n-2} a_r s_{n,n-1}]$$

$$= \frac{k}{s_{n,n}} (-1)^{n-1} (a_r - a_1)(a_r - a_2)(\ldots)(a_r - a_r) \ldots (a_r - a_n) + \frac{k}{s_{n,n}} . s_{n,n}$$

$$= k,$$

idet $a^n - a^{n-1} s_{n,1} + a^{n-2} s_{n,2} - \ldots + (-1)^{n-1} a\, s_{n,n-1} + (-1)^n s_{n,n}$

$$= (a - a_1)(a - a_2)(\ldots)(a - a_n).$$

(Se Jul. Petersens Arithmetik III Side 78 (3), idet x ombyttes med a og a_p med $-a_p$.)

Løsningen er altsaa

$$x_{2p} = -\frac{(-1)^{n-1} k\, s_{n,2p-1}}{s_{n,n}}; \quad x_{2p+1} = \frac{(-1)^{n-1} k\, s_{n,2p}}{s_{n,n}}.$$

(Novalni.)

48. To Cirkler skære hinanden i Punkterne A og B. En Sekant gjennem A skærer de to Kurver i C og D. Bevis at Længden CD varierer proportionalt med sinus af Vinklen CAB.

Opløsning. Centerlinien c skærer CD i P; projiceres den paa CD, faaes $\frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}AD = c \cos APO$, — idet O er det ene Centrum — eller $CD = c \sin CAB$.

(P. A. Larsen.)

Nogle pædagogiske Betragtninger.

(Af P. T. Foldberg.)

I Anledning af Hr. cand. mag. S. A. Christensens Artikel i Tidsskriftet A Nr. 7.

Der er et gammelt Ord, som siger at »godt begyndt er halvt fuldendt«; dette gælder i høj Grad om Mathematikundervisningen — men det gælder her ogsaa, at »aller Anfang ist schwer«. I hvert Fald har jeg, der dog nu har en temmelig lang Praxis som Lærer, den bestemte Følelse, hver Gang jeg staar overfor en Skare Nybegyndere, at det er et meget vanskeligt Arbejde, jeg skal i Lag med. Dette gælder dog i langt højere Grad om den indledende Undervisning i Arithmetik end om Geometrien, idet jeg her føler mig støttet ved at have et saa godt Hjælpemiddel, som Jul. Petersens Lærebog i den elementære Plangeometri ubestridelig er. Naturligvis maa man i Indledningen forklare og illustrere alt efter Elevernes Fatteevne og saa vidt muligt efter den enkeltes Individualitet; Exempler og Illustrationer kan hentes fra selve Klasseværelset, hvor der findes Legemer, Flader, Linier og Punkter nok for Eleven at se paa. Et Skolebord, en Væg, en Kakkelovn ere bedre Hjælpemidler ved den indledende Geometriundervisning end de forskellige specielle Rumformer, der skulle defineres og hvis Navne skulle læres — der kort sagt blive til ganske unyttige Plagemidler for de stakkels Børn. Jeg siger ganske unyttige, thi intet af Hr. Christensens Argumenter, der vel nok ere de sædvanlige, kan overbevise mig om, at Børnene paa dette Standpunkt have den ringeste Nytte deraf. Hr. Chr.s Argumenter ere: [1]) Det Pensum i Plangeometri, der skal gjennemgaaes, er ikke større end at man i 3 Aar med 2 Timer ugentlig kan naa det, [2]) ikke at tale om, at man slipper fri for Forklaringer i 4de Klasse, naar Volumen- og Overfladeformler skulle gjennemgaaes eller slipper fri for Forklaringer som, at et Parallelepipedum er en tyk Firkant eller andre

Absurditeter, der vise Elevens fuldstændige Mangel paa Opfattelse af Rumforhold udover Planen. [3]) At bruge Tiden i 4de Klasse til at give Forklaringer over Legemerne, dertil er den for kostbar, selv om det kan ske i kortere Tid. [4]) Mange Elever forlade Skolen inden 4de Klasse og gaa ud i det praktiske Liv, hvor han vil staa uden at kunne anvende det i Plangeometrien lærte, naar han mangler en saadan indledende Undervisning meddelt paa en fyldig Maade.

Hertil er at bemærke:

ad [1]) Deraf følger ikke, at man behøver at finde kunstig Anvendelse for en Del af Tiden.

ad [2]) At lære Barnet noget i 10 Aars Alderen, blot fordi det dog engang skal lære det, er en pædagogisk Methode, som kan have ganske mærkelige Konsekvenser. Ikke at tale om, at Eleven dog rimeligvis har glemt de paagældende Forklaringer, naar han senere, maaske i 4de Klasse, skal lære Volumen- og Overfladeberegning. Om Eleven véd, at der er noget, som hedder et Parallelepipedum, eller ej, vedrører ikke hans Evne til Opfattelse af Rumforhold. Forskellen mellem Legeme og Flade er da tydelig nok og let nok at oplyse ved passende Exempler.

ad [3]) Dette vil dog være ganske nødvendigt.

ad [4]) I det praktiske Liv er der ikke noget, der hedder et Parallelepipedum; det hedder en Kasse. Rumindholdet af en saadan og Størrelsen af dens Overflade er det, man har Brug for i Praxis — og dette er det jo dog ikke, Hr. Chr. vil lære Børnene som Indledning.

Hvad angaar en historisk Indledning, som den Hr. Chr. i Tilslutning til Hr. Højskoleforstander P. la Cour foreslaar, kan jeg ikke sige andet, end at jeg ogsaa maa anse en saadan som ganske unyttig for den elementære Undervisning. Den kan, navnlig paa et senere Trin, være meget interessant — som enhver historisk Udvikling, der gives paa rette Maade — men mere heller ikke; den kommer m. a. O. til at gjøre Tjeneste som et ganske overflødigt Krydderi,

med kan virke skadeligt, idet der navnlig af den uøvede eller uduelige Lærer kan bibringes Eleven den Tro, at naar blot han kan slaa bravt om sig med Navne og Floskler, er dét det vigtigste, saa faar det gaa med det reale, som det bedst kan. Nej bort med al, naturligvis især den forlorne, Videnskabelighed fra Undervisningens første Trin; der gjælder det om at holde sig til Jorden og ikke flyve for højt.

Noget ganske andet er det, at man i sin Undervisning bør bruge en »historisk Methode« d. v. s. saa vidt muligt lære Barnet i Analogi med den Maade, hvorpaa Slægten i Tidernes Løb har lært, gaa fra det specielle til det almindelige. Dette gjælder det navnlig at holde fast paa ved den indledende Arithmetikundervisning, som jeg nu vil gaa over til at tale om.

* * *

Den indledende Arithmetikundervisning.

Jeg omtalte før, at jeg anser denne for langt vanskeligere end den tilsvarende i Geometri. Medens der tales og skrives saa meget om den sidste, hører man sjeldent noget om Arithmetiken. Man skulde altsaa tro, at alt angaaende den var ganske, som det burde være — men det er desværre langt fra saa. Jeg synes tværtimod, at det meste netop er, som det ikke burde være, og det er derfor, denne indledende Undervisning bliver saa vanskelig og lidet lønnende. Hovedfejlen ved den nuværende Methode er, at den er altfor formel. Den elementære Arithmetikundervisning bør være en direkte Fortsættelse af den elementære Regneundervisning, og falde sammen med den fortsatte Regneundervisning. Hvorvidt man saa vil kalde Faget Regning eller Arithmetik, bliver en Smagssag, der er ganske ligegyldig.

Jeg skal nærmere udvikle, hvorledes jeg tænker mig det ordnet. Barnet lærer ved Regningen med hele Tal, dels ad E[illegible]ls ad Forstaaelsens Vej, at »Leddenes Orden

er ligegyldig«, at »Faktorernes Orden er ligegyldig«, Reglerne for at hæve og sætte Parentheser o. s. v. — det vil sige, lærer ikke at udtale disse Sætninger, hvilket jo ogsaa er det mindst væsentlige, i hvert Fald paa dette Trin, men lærer at anvende dem. Idet jeg gaar ud fra, at Regning er et Fag, som der bæres dyb Respekt for, som altsaa af Skolen kun betros til øvede og dygtige Lærere, bliver Læren om Brøk indøvet paa en saadan Maade, at Barnet har fuld Forstaaelse (relativt) af alle Operationerne. Ved at anvende tilstrækkelig Tid er dette meget let at opnaa.

Opgaver i Forholdsregning og Ligninger gives til at begynde med i »Ord« — naturligvis af ganske simpel Beskaffenhed. Derved indføres Bogstavet naturligt som Betegnelse for den ubekjendte. Jeg vil her for et Øjeblik forlade den almindelige skitserende Udvikling og gjøre et Par specielle Bemærkninger. For det første, at det er en pædagogisk Fejl altid at kalde den ubekjendte x. Kald den i Flæng a, b, k, x o. s. v. — eller brug f. Ex. den Regel at benævne den med Forbogstavet i Navnet paa den ubekjendte. Dette stadige x staar virkelig for mange Børn som noget meget mystisk og skrækindjagende (smlgn. den lille Marius i Alex. Kiellands: Gift). Og for det andet: væn Eleven til altid at sætte Spørgsmaalstegn efter Ligningen for udtrykkelig at accentuere, at der gøres et Spørgsmaal. Hvormange af vore ældre og mere forstandige Elever famle ikke, naar man spørger dem, hvad en Ligning egentlig er.

Vi ere nu færdige til at begynde paa Potens og Rod. Brug Bogstaver, men sparsomt. De paagjældende Sætninger faa for Barnet — og det er det, vi udelukkende skulle tage Hensyn til — en lige saa stor Alméngyldighed, naar man til Prøve paa dem eller rettere Udledelse af dem tager f. Ex. $\frac{a^7}{a^4}$, $a^7 . a^4$, $(a^3)^4$, $\sqrt[6]{a^4}$ . . . , som hvis vi tage Bogstavexponenter. De irrationale Størrelser volde efter min Mening ingen særlig Vanskelighed, men man maa gi[illegible]kelig Tid til

strax at tage en Del Exempler paa at finde dem med passende Tilnærmelser; det er ganske vist noget besværligt og lidt kedsommeligt for Læreren, men Eleverne plejer det ikke at kede.

Derefter indøves Logarithmer, Rentesregning, Kæderegning og i Tilknytning til Geometrien Areal- og Volumenberegning, der dog ikke bør strække sig ud over de allersimpleste Former.

Endnu have vi kun haft at gøre med positive Tal. Som Afslutning af den elementære Undervisning indføres negative Tal og endelig kvadratiske Ligninger.

Hvad vil da vindes ved at omordne Undervisningen saaledes som jeg ønsker det? Svaret er let nok at give: Der vil opnaas, at medens nu en stor, maaske den største, Del af Eleverne kun lære at fremplapre Arithmetikens Sætninger rent mekanisk og uden nogen virkelig Forstaaelse, og regne Opgaver paa samme Maade, vil min Methode fremkalde Forstaaelse — saa god, som den kan blive hos Børn i den Alder — og Lyst til Arbejdet.

* * *

Examensfordringer m. m.

Blev Arithmetikundervisningen og dermed Fordringerne til Examen ændret paa den antydede Maade og blev der samtidigt foretaget nogle Reduktioner paa Geometriens Omraader — (af Ting, der kunde stryges ved den første Undervisning, anføres den almindelige Ligedannethedstheori og den ptolemæiske Læresætning) —, vilde dette ogsaa medføre, at der vilde vindes Tid, dels ved Hjemmearbejdet og dels paa Skolen, idet Mathematik og Regning nok vilde kunne afgive 1 Time ugentlig til et af de Fag, som ønske og trænge til at faa flere Timer. Jeg vilde da lægge et godt Ord ind for det vigtige Fag Geographi, der burde være saa rigeligt betænkt med Timer navnlig i de sidste Aar, at der kunde meddeles en nogenlunde fyldig Undervisning om de forskellige

Landes Naturforhold, Hjælpekilder, Kommunikationsmidler etc. Det vil være ganske overflødigt — og iøvrigt heller ikke paa sin Plads i dette Tidsskrift — at give nogen længere Udvikling for at paavise den store Betydning, Kundskaber af denne Art have allerede for os og endnu mere ville faa for vore Efterkommere.

Desværre er der vist i de ledende Kredse snarest Stemning for at indskrænke bemeldte Fag. Jeg formoder, at dette har sin Grund i, at det ikke bidrager til at udvikle Aandsmodenhed. Men det bør dog betænkes, at dette er et Spørgsmaal, som ved den første Undervisning og den dertil svarende Afslutningsprøve, den almindelige Forberedelsesexamen, kommer i anden Række. Det, der her væsentlig skal naas, og som denne Examen skal give Garanti for, er at der er erhvervet en vis Mængde positiv, for det praktiske Liv nødvendig Viden, og denne Mængde skal ikke være større, end at den kan være lært, virkelig lært, af ethvert normalt Barn i 15—16 Aars Alderen. Man kan derimod ikke forlange, at der skal være fremkommet eller fremdrevet en vis bestemt Aandsmodenhed hos alle disse Børn. Graden af denne kan derfor ikke gøres til Genstand for Examen, og der kan vel vanskeligt fastslaas Regler for, hvorledes den skal fremkaldes, eller hvorvidt den skal være drevet i den og den Alder eller i den og den Klasse, da dette er i saa høj Grad afhængigt af Individets hele Aandsart — et Udtryk, jeg haaber vil forstaas.

Paa dette første Trin er det navnlig Hjemmets Sag at fremme Aandsudviklingen, og Læreren maa naturligvis efter bedste Evne hjælpe med hertil; kun hvor Hjemmet ikke magter denne sin Opgave, bliver det Lærerens Sag at gribe mere aktivt ind, hvis det ellers lader sig gøre.

Til Slutning skal jeg dvæle lidt ved Gymnasiet, dettes Afslutningsprøve Studenterexamen, Betydningen af denne og Fordringerne dertil, navnlig i mathematisk Retning.

Gymnasiet bør efter min Mening først og fremmest være og altsaa indrettes som en Forberedels[illegible] Universitetet,

Studenterexamen med dens to Afdelinger en Adgangsexamen til Universitetet med dets to Rækker Fakulteter: det theologiske og juridiske samt tildels det filosofiske paa den ene Side, det medicinske og mathematisk-naturvidenskabelige paa den anden.

Jeg ved, at de fleste betragte Gymnasiet paa en anden Maade, nemlig først og fremmest som en højere Dannelsesanstalt; jeg for mit Vedkommende tør ikke dele denne Betragtningsmaade, idet jeg mener, at det ikke kan fordres af Staten, at den skal sætte en kostbar Undervisning og et stort Examensapparat i Scene alene af Hensyn til de faa, der iøvrigt have Midler til at skaffe sig en videregaaende boglig Dannelse. Det maa ganske blive disses egen Sag; der vil altid findes duelige private Lærere og Kursus nok til at tage sig af dem, og saa kan de tilmed faa det, som de selv vil. Nogen statskontrolleret Examen kan de ikke fordre, og det maa vel ogsaa være et ganske underordnet Spørgsmaal for dem, med mindre en os ganske uvedkommende Forfængelighed er med i Spillet.

Gymnasiets Undervisning maa altsaa først og fremmest være indrettet for dem, der ønske at tjene Staten som Embedsmænd eller Videnskabsmænd. Det bliver da at undersøge, i hvilket Omfang disse skulle lære Mathematik, idet vi gaa ud fra, at de i Skolens lavere Klasser have lært det tidligere i denne Artikel foreslaaede Pensum og alle skulle fortsætte Mathematikundervisningen i de øverste Klasser, saaledes som det i Kultusministeriets Lovforslag om »Forandringer i Lov af 1ste April 1871 om Undervisningen i de lærde Skoler i Danmark m. m.« er foreslaaet.

De Elever, der senere agte at gaa den theologiske, juridiske eller filologiske Vej, Eleverne af den sproglig-historiske Retning altsaa, have ikke Brug for nogen stor mathematisk Viden. Undervisningen maa for deres Vedkommende væsentlig gaa ud paa Indøvelse af de formelle Beviser i Algebraen, de forbigaaede Ting i Geometrien, i det hele Udvikling af den logiske Evne og Sandsen for Stringens. Skal der medtages noget

nyt, mener jeg, at Rumgeometri, formelt behandlet, er ypperligt skikket til en saadan Udvikling. Ministeriet har aabenbart tænkt sig en saadan Ordning, idet det i Motiverne bl. a. hedder: »det er fundet ønskeligt, at Mathematikundervisningen gjenindføres i den sproglig-historiske Afdelings to øverste Klasser, for at de mathematiske Læresætninger bedre kunde fæstnes i Disciplenes Bevidsthed og blive frugtbringende for dem for Livet, samt for at der i Mathematikundervisningen kunde haves en Støtte for Undervisningen i Naturlære. Man anser to ugentlige Timer gjennem begge Klasser for tilstrækkelige til dette Formaal, idet det ikke er Hensigten at udvide Omfanget af denne Undervisning for den sproglighistorisk Afdelings Elever synderligt ud over det hidtil for 4de Klasse foreskrevne Maal«.

For den mathematisk-naturvidenskabelige Afdelings Vedkommende, hvor Mathematik spiller en ganske betydelig Rolle som en vigtig Hjælpevidenskab ved Siden af sin aandsdannende Betydning, ere Fordringerne nu i det hele ret passende, og der er jo i det nævnte Lovforslag ikke Tale om nogen væsentlig Forandring i den Henseende. Det er Meningen at give Faget et Par Timer mindre om Ugen, men det samme Pensum — eventuelt minus Projektionstegning — kan dog godt naas under Forudsætning af, at man faar tilstrækkeligt arbejdsdygtige og aandeligt udviklede unge Mennesker at arbejde med.

I den Henseende tror jeg, Fordringerne trænge til at sættes op; alt for mange uarbejdsdygtige og umodne Elever faa Lov til at følge med paa Slæbetov, til Plage for dem selv og til Besvær og Tidsspilde for andre. Det er disse Elevers Skyld, at den megen Talen om Overbebyrdelse i Skolens øverste Klasser er kommen frem; de almindeligt flinke Elever synes ikke, at de have for meget at bestille — og det synes jeg heller ikke. Der er derimod en anden Ting, som jeg vil til Livs, det er Overproduktionen af Studenter. Vi have i vort lille Land ikke Brug for 400 Studenter om

vi producere — Følgen deraf er, at mange af disse før eller senere gaa rabundus eller i alt Fald maa nøjes med at friste en kummerlig Tilværelse. Det eneste Middel herimod er: Stem Fordringerne op i alle Henseender, kvantitativt og navnlig kvalitativt. Det nævnte Lovforslag er et Skridt i denne Retning; blandt andet af den Grund saa jeg for mit Vedkommende gjerne, at det kunde føres igjennem.

Danske Examensopgaver.

Den kgl. Landbohøjskoles Examen.

(Oktober 1890.)

1. Opskriv den ordnede Ligning, hvis Rødder ere α_1, α_2, α_3, α_4 og α_5, og udregn derpaa (ved Hjælp af Logarithmer) dens Koefficienter (med 3 rigtige Decimaler), idet

$\alpha_1 = 3{,}2418$, $\alpha_2 = -2{,}1357$, $\alpha_3 = 1{,}9876$, $\alpha_4 = 0{,}7537$ og $\alpha_5 = -1{,}2346$.

Endelig udregnes (ved forkortede Multiplikationer) Koefficienterne (med 2 rigtige Decimaler) i den ordnede Ligning, der foruden de nys nævnte 5 Rødder har Roden $\alpha_6 = 0{,}7643$.

Opløsning. Man finder $x^5 - 2{,}613x^4 - 7{,}144x^3 + 14{,}367x^2 + 11{,}015x - 12{,}805 = 0$ og $x^6 - 3{,}38x^5 - 5{,}15x^4 + 19{,}83x^3 + 0{,}03x^2 - 21{,}22x + 9{,}79 = 0$.

2. Ottekanten ABCDEFGH's Vinkelspidser have Koordinaterne:

A: (0, 0)	D: (5,234, 1,762)	G: (3,456, — 0,673).
B: (2,145, 1,234)	E: (7,312,0)	H: (1,534, — 1,046).
C: (4,023, 0,673)	F: (6,234, — 0,973)	

Man søger Ottekantens Vinkler, Sider og Areal.

Opløsning. AE deler $\angle$ A i α_1 og α_2, $\angle$ E i η_1 og η_2, de andre Vinkler deles ved Vinkelspidsernes Ordinater BB_1 ... B i β_1 og β_2 o. s. v.

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \cot\beta_1 = \frac{1,234}{2,145}$ o. s. v. Man finder da

$\alpha_1 = 29^0 54',7$	$\beta_1 = 60^0 5',3$	$\gamma_1 = 106^0 37',9$	$\delta_1 = 48^0 2',1$
$\alpha_2 = 34^0 17',3$	$\beta_2 = 73^0 22',1$	$\gamma_2 = 131^0 57',8$	$\delta_2 = 49^0 42',3$
$A = 64^0 12',0$	$B = 133^0 27',4$	$C = 238^0 35',7$	$D = 97^0 44',4$

$\varepsilon_1 = 40^0 17',7$	$\varphi_1 = 47^0 55',8$	$\xi_1 = 96^0 9',8$	$\eta_1 = 79^0 1',0$
$\varepsilon_2 = 42^0 4',2$	$\varphi_2 = 83^0 50',2$	$\xi_2 = 100^0 59',0$	$\eta_2 = 55^0 42',7$
$E = 82^0 21',9$	$F = 131^0 46',0$	$G = 197^0 8',8$	$H = 134^0 43',7$

$AB = 2,145 \sec\alpha_1 = 2,475$	$\triangle ABB_1 = 1,323$
$BC = 0,561 \sec\beta_2 = 1,960$	$BCC_1B_1 = 1,790$
$CD = 1,089 \sec\delta_1 = 1,629$	$CDD_1C_1 = 1,474$
$DE = 1,762 \sec\delta_2 = 2,725$	$DED_1 = 1,830$
$EF = 0,973 \sec\varphi_1 = 1,452$	$EFF_1 = 0,524$
$FG = 0,3 \sec\varphi_2 = 2,794$	$FGG_1F_1 = 2,284$
$GH = 0,373 \sec\eta_1 = 1,958$	$GHH_1G_1 = 1,651$
$HA = 1,046 \sec\eta_2 = 1,857$	$HAH_1 = 0,802$
	Arealet $= 11,68.$

3. Sidefladerne i en regelmæssig Pyramidestub (af første Art) have parallele Kanter af Længde a og b. Man skal bestemme Længden af Siden i et Snit parallelt med Endefladerne, og som deler det givne Legeme i to Dele,

1) hvis Rumfang forholde sig som α til β,

eller 2) hvis samlede Overflader forholde sig som α til β, hvor det dog i sidste Tilfælde antages, at Endefladerne ere Kvadrater, og at Sidefladerne have Vinkler, hvis Tangent er ± 2.

Opløsning.

1) $\frac{V_a}{a^3} = \frac{V_x}{x^3} = \frac{V_b}{b^3} = \frac{V_a - V_x}{a^3 - x^3} = \frac{V_x - V_b}{x^3 - b^3};\ \frac{a^3 - x^3}{x^3 - b^3} = \frac{\alpha}{\beta},$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\alpha b^3 + \beta a^3}{\alpha + \beta}}.$$

2) $$\frac{a^2 + x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}(a - x)(a + x)}{b^2 + x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}(x - b)(x + b)} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3a^2 - x^2}{3x^2 - b^2},$$

$$x = \sqrt{\frac{\alpha b^2 + 3\beta a^2}{3\alpha + \beta}}.$$

4. Der er givet en Ellipse, med Excentricitet e og Axerne 2a og 2b henad X- og Y-axen, samt Linier med Ligningerne $x = \pm \frac{a}{e}$ og $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + c = 0$. Man søger den sidst nævnte Linies Skæring med hver af de to første Linier og trækker i hvert Brændpunkt en Linie vinkelret paa dette Brændpunkts Forbindelseslinie med det nærmeste af de to Skæringspunkter. Søg Koordinaterne til de to Vinkelrettes Skæringspunkt samt det geometriske Sted for dette Punkt, naar c varierer.

Opløsning.

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{a} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + c &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ give } \left\{\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{e} \\ y &= -b\left(c \pm \frac{1}{e}\right) \end{aligned}\right. .$$ Man finder Retningskoefficienterne $-\frac{b}{a} \cdot \frac{1 \pm ce}{1 - e^2}$ og Ligningerne for de vinkelrette: $y = \frac{1 - e^2}{1 \pm ce} \cdot \frac{a}{b}(x \mp ea) = \frac{1}{1 \pm ce} \cdot \frac{b}{a}(x \mp ea)$, der skære hinanden i $x = -\frac{a}{c}$, $y = -\frac{b}{c}$.

Ligningen for det geometriske Sted bliver da $y = \frac{b}{a}x$.

Svenske Examensopgaver.

Maturitetsexamen.

(Höstterminen 1890.)

Algebraiska uppgifter.

1. Summan af en rätvinklig triangels sidor är 132 m.; summan af deras kvadrater är 6050 qvm. Huru långa äro sidorna?

Opløsning. Af Ligningerne

$$x + y + z = 132$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6050$$
$$x^2 = y^2 + z^2$$

findes først $x = 55$, dernæst $y = 44$ og $z = 33$. Siderne ere saaledes 33 m., 44 m. og 55 m.

2. Ett kar kan fyllas medelst två rör på 16 timmar. Men om efter de 4 första timmarnes förlopp det ena röret afstänges, åtgå ytterligare 36 timmar till karets fyllande. Huru lång tid skulle erfordras för dess fyllande medelst hvartdera röret ensamt?

Opløsning. Det ene Rør kan fylde $\frac{3}{4}$ af Karret i 36 Timer, følgelig hele Karret i 48 Timer. I 1 Time vil det første Rør da kunne fylde $\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{24}$ af Karret, vil altsaa behøve 24 Timer for at fylde det hele.

3. Utveckla ett tal a i en oändlig geometrisk progression, hvars första term är ett annat gifvet tal b (Exempel: $a = 7$, $b = 8$). Är uppgiften alltid möjlig?

Opløsning. Progressionsexponenten k bestemmes af

$$a = \frac{b}{1 - k}.$$

$$\therefore \quad k = \frac{a - b}{a}.$$

Mulighedsbetingelsen er $-1 < \frac{a - b}{a} < 1$,

der for a positiv giver $2a > b > 0$,
for a negativ $2a < b < 0$.

I Exemplet faas $k = -\frac{1}{7}$, Progressionen altsaa: $8, -\frac{8}{7}, \frac{8}{49}, \ldots$

4. Trigonometriska tangenterna för en triangels vinklar äro i ordning proportionela mot 1, 3, 5. Huru stora äro vinklarna?

Opløsning. Da Summen og Produktet af Tangenterne af Vinklerne i en Trekant ere ligestore, haves til Bestemmelse af Forholdsexponenten a Ligningen

$$a + 3a + 5a = a \,.\, 3a \,.\, 5a$$

$$\therefore \quad a = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

$\operatorname{tg} A = \frac{3}{\sqrt{15}}$, $\operatorname{tg} B = \frac{9}{\sqrt{15}}$, $\operatorname{tg} C = \sqrt{15}$. Vinklerne findes af Tabellen.

5. Då ett sällskap samlades, tog en hvar, som anlände, samtliga de redan komne i hand, och sålunda utbyttes 231 handslag. Huru många voro personerna?

Opløsning. x Personer udvexle $1 + 2 + 3 + \ldots (x - 1)$ $= \frac{x(x-1)}{2}$ Haandtryk. Ligningen

$$\frac{x(x-1)}{2} = 231$$

giver

$$x = 22.$$

6. En triangels sidor äro 8, 10 och 13 cm. långa. Huru stor blir den solida figur, som uppkommer, då triangeln roterar kring den första sidan?

Opløsning. Dobbeltkeglens Volumen $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \,.\, 8$, hvor h betyder Trekantens Højde paa Siden 8. Denne bestemmes af

$$4h = \sqrt{\frac{31}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{2}},$$

altsaa

$$V = \pi \,.\, \frac{31 \,.\, 11 \,.\, 25}{32} = 837\,\frac{31}{112}\ \text{cm.}^3,$$

idet $\pi = \frac{22}{7}$.

7. Om $a + 10b + 100c + 1000d + \text{etc.}$ är ett helt tal, som är multipel af 71, så skall

$$b - 7a + 10c + 100d + \text{etc.}$$

äfven vara multipel af 71.

Opløsning. $b - 7a + 10c + 100d + .. = p$

$$10b - 70a + 100c + 1000d + .. = 10p$$

$$a + 10b + 100c + 1000d + .. = 10p + 71a.$$

Er Tallet paa venstre Side et Multiplum af 71, er 10p det ogsaa; men 71 gaar da op i p, da det er primisk med 10.

Geometriska uppgifter.

1. Att skära en determinerad rät linie så, att summan af kvadraten på den ena delen och dubbla kvadraten på den andra får en uppgifven storlek.

Opløsning. Kaldes den givne Linie l, det givne Areal k^2, den ene Del af Linien x, haves

$$2x^2 + (l - x)^2 = k^2,$$

hvoraf
$$x = \frac{l \pm \sqrt{3k^2 - 2l^2}}{3},$$
der let konstrueres.

Som første Mulighedsbetingelse faas $k^2 \geq \frac{2}{3} l^2$.

Endvidere skal $\frac{l + \sqrt{3k^2 - 2l^2}}{3} < l$, hvoraf $k^2 < 2l^2$,

og $\frac{l - \sqrt{3k^2 - 2l^2}}{3} > 0$, hvoraf $k^2 < l^2$.

Opgaven har da to Løsninger, naar $l^2 > k^2 > \frac{2}{3} l^2$; én Løsning, naar $2l^2 > k^2 > l^2$, og naar $k^2 = \frac{2}{3} l^2$.

2. ABCD är en i en cirkel inskrifven fyrhörning, tangenterna i B och D råkas på linien AC; bevisa, att rektangeln, som innehålles af två motstående sidor i fyrhörningen är lika stor med rektangeln af de båda andra!

Opløsning. Kaldes Skæringspunktet mellem Tangenterne i B og D for O, er

$$\triangle AOB \sim \triangle BOC : \frac{AB}{BC} = \frac{AO}{BO}$$

og
$$\triangle AOD \sim \triangle DOC : \frac{AD}{DC} = \frac{AO}{DO},$$

men $$BO = DO$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \text{ eller } AB \,.\, DC = BC \,.\, AD.$$

hv. sk. b.

3. Att konstruera en parallelogram, då man känner perimetern, en diagonal och en vinkel.

Opløsning. I Parallelogrammet ABCD kjendes AC, $\angle B$ og $AB + BC =$ den halve Perimeter. Forlænges AB til F, saa at $BF = BC$, bliver $\angle AFC = \frac{1}{2} B$, saa at Trekanten AFC kan konstrueres og dernæst B bestemmes som Skæringspunkt mellem AF og den vinkelrette paa Midten af FC. Der bliver to forskellige Trekanter AFC, men de dertil svarende Trekanter ABC vises let at være kongruente, saa at Opgaven kun kan faa en Løsning.

4. Upprita en cirkel, som går genom två gifna punkter och afskär en uppgifven längd af en gifven rät linie!

Opløsning. De givne Punkter være A og B. AB skære den givne Linie i P og Cirklen skære den i Punkterne X og Y, $XY = l$. Da er

$$PX \,.\, PY = PB \,.\, PA \text{ og } PY - PX = l,$$

hvoraf $$PX = -\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + PB \,.\, PA},$$

der let konstrueres. Her er forudsat, at Punkterne A og B ligge paa samme Side af den givne Linie, og Opgaven er da altid mulig.

Ligge de derimod paa forskellig Side af den givne Linie, faas $$PX = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - PB \,.\, PA},$$

i saa Fald bliver Mulighedsbetingelsen $\frac{l^2}{4} \geqq PB \,.\, PA$.

5. Dela en gifven rät kon medelst tvänne med basen parallela plan så, att konens bugtiga yta genom dem delas i tre lika stora delar!

Opløsning. Lad de to Planer af Frembringeren afskære Stykkerne x og y, regnede fra Toppunktet, medens Keglens Sidelinie er s, Grundfladeradius r. Ifølge Opgaven er da

$$\frac{x^2 r}{s} = \frac{1}{3} rs \quad \text{og} \quad \frac{y^2 r}{s} = \frac{2}{3} rs,$$

hvoraf

$$x^2 = \frac{1}{3} s \, . \, s \quad \text{og} \quad y^2 = \frac{2}{3} s \, . \, s,$$

saa at x og y let konstrueres som Mellemproportionaler.

6. Angif eqvationen för den eller de cirklar, hvilka tangera såväl hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ som dess båda asymptoter!

Opløsning. Cirklen maa have sit Centrum paa Brændpunktsaxen og gaa gjennem Toppunktet. Kaldes Centrumsabscissen m, bliver Radius $m \, . \sin\theta = m \, . \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; altsaa skal

$$a - m = \frac{mb}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad m = \frac{a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Ligningerne for de to Cirkler, der opfylde Betingelsen er da

$$(x \mp m)^2 + y^2 = m^2 \, . \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

eller

$$x^2 + y^2 \mp 2x \, . \frac{a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2b\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 - 2b^2.$$

7. Att konstruera en triangel, då man känner en af dess sidor, den inskrifna cirkelns radie samt radien i den cirkeln, som tangerar den bekanta sidan och de båda andras förlängningar.

Opløsning. Afstanden mellem de to Cirklers Røringspunkter med en af de andre Sider er lig den givne Side. Ved at benytte dette konstrueres Trekanten let.

Uppgifter af mekaniskt och fysikaliskt innehåll.

1. Från öppningen af en 152 m. djup grufva kastas en kropp rät uppåt med 29 m.'s begynnelsehastighet. Huru många sekunder senare skall en anna[illegible] nedsläppas från

samma ställe för att de båda kropparna samtidigt skola träffa grufvans botten? Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m.

Opløsning. Det første Legeme kommer tilbage til Grubens Munding efter $\frac{290}{49}$ sek. og med Hastigheden 29 m.; det træffer Bunden t sek. efter, idet $4{,}9\,t^2 + 29\,t = 152$, der giver $t = c.\ \frac{164}{49}$. Saaledes hengaar ialt $\frac{454}{49}$ sek., inden det første Legeme træffer Bunden, medens det andet bruger $\sqrt{\frac{1520}{49}} = \frac{39}{7}$ sek. Tidsforskellen er da $\frac{181}{49} = c.\ 3\frac{2}{3}$ sek.

2. Två lika tunga kulor, den ena af platina, den andra af aluminium, nedhänga på fina trådar från hvar sin ände af en rak stång, hvars längd är 58 cm. och hvars vigt kan lemnas utan afseende. I hvilken punkt skall stången understödjas för att kunna vara i jemnvigt i vågrät ställning, då båda kulorna äro fullständigt nedsänkta i vatten? Platinans egentliga vigt är 21,5, aluminiums 2,56.

Opløsning. Stangen skal understøttes i det Punkt, der deler Stangen i Forholdet $\frac{21{,}5}{2{,}56}$ (Platinkuglen paa den længste Arm).

3. I en ihålig cylinder, som är öppen i den ena änden, i den andra sluten med en plan botten, finnes luft afstängd medels en cylindrisk kolf af 23,5 kg.'s vigt, som sluter till lufttätt, men är rörlig utan afseväird friktion. Då cylindern, hvars genomskärningsyta är 180 qvcm., står med den öppna änden rätt uppåt, är den afstängda luftens rymd 2,7 liter vid det rådande barometerståndet af 74 cm. Beräkna huru mycket kolfven kommer at flytta sig, då cylindern vändes med den öppna änden rätt nedåt, under förutsättning att cylinderns höjd är så stor, att kolfven ej faller ur! Qvicksilfrets egentliga vigt är 13,6.

Opløsning. Naar Cylinderen er i den førstnævnte

Stilling, er den indespærrede Luftcylinders Højde 15^{cm}; dens Tryk paa qvcm. $h = (74 . 13,6 + \frac{2350}{18})$ gr. Vendes Cylinderen, synker Stemplet et Stykke x, bestemt ved

$$\frac{h . 15}{15 + x} + \frac{2350}{18} = 74 . 13,6,$$

der giver

$$x = c . 4\frac{1}{2} \text{ cm.}$$

4. En glaskula väges fullständigt nedsänkt i en vätska och lider dervid en vigtsförlust af 38,53 gr., då vätskans temperatur är 0^0. Är vätskans temperatur åter $21^0,4$, blir vigtsförlusten 37,70 gr. Huru stor är den vätskans rymdutvidgningskoefficient, då glasets är 0,000026?

Opløsning. $38,53 . 1,0005564 = 37,70 . (1 + 21,4\alpha)$ giver Vædskens Rumudvidelseskoefficient

$$\alpha = 0,00105.$$

5. I ett kärl, som innehåller 3 kg. snö af — 4^0 graders temperatur, häller man 6,5 kg. vatten af 24^0 och rör om blandingen. Hurudan blir denna till aggregationsform och temperatur? Isens egentliga värme är 0,5, dess smältningsvärme 79 värmeenheter.

Opløsning. Vandet afkøles til 0^0 og afgiver derved 156 Calorier; 6 af disse medgaa til at give Sneen Temperaturen 0^0, og derefter smelter $\frac{150}{79} = 1\frac{61}{79}$ kg. Sne. Massen faar altsaa Temperaturen 0^0; $8\frac{43}{158}$ kg. af den er flydende, Resten fast.

6. Ett upprätt stående cylindriskt glaskärl, hvars diameter är 24 cm., är till en del fyldt med vatten. En snedt uppåt riktad ljusstråle, liggande i ett genom cylinderns lodräta axel gående plan, inkommer i kärlet vid punkten A, belägen 9 cm. under vattnets yta. Sedan strålen passerat genom vattenmassan, lemnar den åter kärlet i punkten B, som ligger i jämnhöjd med A. Om vattnet vore borta, skulle strålen

från A träffa den motsatta sidan af kärlet i punkten C. Beräkna huru högt ofvanom B punkten C är belägen, då ljusbrytningen i kärlväggen kan lemnas utan afseende! Vattnets brytningsexponent är $^4/_3$.

Opløsning. C er beliggende 18 cm. højere end B.

7. Två olika dynamomaskiner alstra i hvar sin skilda ledning elektriska strömmar, som båda hafva samma styrka. Om man tillökar de yttre ledningarne, den ena med 8 m. ledningstråd, den andra med 13 m. tråd af samma slag, så blir den minskning i strömstyrka, som däraf förorsakas, för båda strömmarne densamma. Huru stort är förhållandet mellan de båda maskinernas elektromotoriska krafter?

Opløsning. $i = \frac{E_1}{m_1} = \frac{E_2}{m_2}$,

$$i_1 = \frac{E_1}{m_1 + \alpha . 8} = \frac{E_2}{m_2 + \alpha . 13},$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 + \alpha . 8}{m_2 + \alpha . 13} = \frac{8}{13}.$$

Notitser.

Fra Hr. C. Jonsen, Falster, have vi modtaget et lille Arbejde: Om Tals Delelighed. Hr. J. begynder med at give en Regel for et Tals Delelighed med 7, nemlig: »7 gaar op i et Tal, naar det gaar op i Tierne minus det dobbelte af Enerne« (»Tierne« betyder her hele det Tal, der bliver tilbage, naar Enercifret tages bort). Dette kan bevises saaledes: Er $a - 2b = 7q$, bliver $10a - 20b = 70q$, $10a + b = 70q + 21b = 7k$.

Er p et vilkaarligt Primtal og sættes

$$a - mb = p . q,$$

faas $$10a + b = p . 10q + (10m + 1) b,$$

hvor m altid kan bestemmes saaledes, at p gaar op i $10m + 1$

(undtagen naar p = 2 eller 5). For p = 7, 11, 13, 17, 19 faas t. Ex. m = 2, 1, — 4, 5, — 2. De derved dannede Regler have dog ingen videre praktisk Betydning.

»Et tocifret Tal gaar op i en Størrelse, naar det gaar op i Differensen mellem Tallets Enere × Størrelsens Tiere og Tallets Tiere × Størrelsens Enere«. Dette bevises saaledes: $10a + b$ være et tocifret Tal, $(10a + b)q$ et Multiplum deraf. Er $bq = 10m + r$, r èncifret, bliver

$$(10a + b)q = (aq + m)10 + r,$$

altsaa $b(aq + m) - ar = 10am + mb = (10a + b)m.$

Kvotienten q dannes let af Kvotienten m.

* * *

Produktet af en Række blandede Tal, hvis hele Del dannes af paa hinanden følgende Tal i Talrækken, medens den brudne Del til Tæller har dét hele Tal, den hører til og til Nævner det paafølgende hele Tal, vil være lig Produktet af et lige saa stort Antal paa hinanden følgende hele Tal, begyndende med det samme som den første Række — idet dog Tallet efter den første og foran den sidste Faktor udelades. F. Ex. $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 5\frac{5}{6} \cdot 6\frac{6}{7} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8.$

Bevis: $$\left(a + \frac{a}{a+1}\right) \cdot \left(a + 1 + \frac{a+1}{a+2}\right) \cdot \left(a + 2 + \frac{a+2}{a+3}\right) \ldots\ldots \left(a + n - 3 + \frac{a + n - 3}{a + n - 2}\right) \cdot \left(a + n - 2 + \frac{a + n - 2}{a + n - 1}\right) = \frac{a(a+2)}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a+3)}{a+2} \cdot \frac{(a+2)(a+4)}{a+3} \ldots\ldots \frac{(a+n-3)(a+n-1)}{a+n-2} \cdot \frac{(a+n-2)(a+n)}{a+n-1}$$
$$= a(a+2)(a+3)\ldots\ldots(a+n-3)(a+n-2)(a+n).$$

(N. P. Jensen).

Løste Opgaver.

(Opgaverne Nr. 25 og 28 ere ogsaa løste af stud. mag. Johannes Petersen.)

30. Naar i en Firkant med Siderne a, b, c, d, hvori en Cirkel kan indskrives, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d ere de mindste Radier i de fire Trekanter, hvori Diagonalerne dele Firkanten, da er, idet s og s_1 ere henholdsvis Sidernes og Diagonalernes halve Sum,

$$(\varrho_a + \varrho_c)(\varrho_b + \varrho_d) = \left(\frac{2s_1 - s}{2}\right)^2,$$

hvilket ønskes bevist.

Opløsning. Cirklen med Radius ϱ_a har Centrum O_a og rører en Diagonal i M_a osv. Idet Diagonalernes Skæringspunkt kaldes P, er $\triangle PM_aO_a \sim \triangle O_bM_bP \sim \triangle PM_cO_c \sim \triangle O_dM_dP$,

altsaa $\frac{\varrho_a}{PM_a} = \frac{PM_b}{\varrho_b} = \frac{\varrho_c}{PM_c} = \frac{PM_d}{\varrho_d} = \frac{\varrho_a + \varrho_c}{PM_a + PM_c} = \frac{PM_b + PM_d}{\varrho_b + \varrho_d}$.

Man finder let, at $PM_a + PM_c = \frac{2s_1 - a - c}{2} = \frac{2s_1 - s}{2}$, idet

$a + c = b + d = s$; paa samme Maade $PM_b + PM_d = \frac{2s_1 - s}{2}$;

følgelig $(\varrho_a + \varrho_c)(\varrho_b + \varrho_d) = \left(\frac{2s_1 - s}{2}\right)^2$.

(P. A. Larsen.)

(Ogsaa løst af Theodor Ney og L. F. Lautrup-Jørgensen.)

31. Af fire lige store Kugler med Radius r rører hver de andre 3. Find Rumindholdet af et om denne Kuglestabel omskrevet Oktaeder, hvis fire Flader røre hver tre Kugleflader og de øvrige fire Flader hver en Kugleflade, idet enhver af de sidst nævnte Flader er parallel med den modsatte.

Opløsning. De fire førstnævnte Planer med Forlængelser danne et regulært Tetraeder; tre af de sidstnævnte Planer skære en Side af Tetraederet i Linier, der ere parallele med de dertil hørende Kanter. Oktaederets Sider blive saaledes ligesidede Trekanter osv. Oktaederet er regulært og dets Kant og dermed dets Volumen halvt saa stort som Tetraederets. Tetraederet er ligedannet med det, der dannes af de fire Kuglers Centra. Dettes Kant er 2r og dets indskrevne Kugles

Radius $\frac{r}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Det store Tetraeders tilsvarende Radius er $r + \frac{r}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; kaldes dets Kant a, faaes

$$\frac{a}{2r} = \frac{r + \frac{r}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}, \text{ hvoraf } a = 2r(1 + \sqrt{6}).$$

Tetraederets Volumen er

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Oktaederets Volumen bliver da

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{r^3}{3}(19\sqrt{2} + 18\sqrt{3}).$$

(P. A. Larsen.)

32. M er et vilkaarligt Punkt i et Keglesnit med Brændpunkterne A og B. Naar nu Normalen til M skærer AB i N og Cirklen AMB i P, da er $\frac{MN}{MP} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, hvilket ønskes bevist.

Opløsning. Keglesnittets Axer tages til Koordinataxer paa sædvanlig Maade. Punktet P ligger paa y-Axen (se Opgaver ved Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt 1877 IV). Har M Koordinaterne (x_1, y_1), bliver Normalens Ligning $y - y_1 = \pm\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$; N faas Koordinaterne $\left(\frac{a^2 \mp b^2}{a^2}x_1, 0\right)$ og P Koordinaterne $\left(0, \frac{b^2 \mp a^2}{b^2}y_1\right)$. Man har da

$$\frac{MN}{MP} = \frac{\sqrt{\left(x_1 - \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}x_1\right)^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{b^2 \mp a^2}{b^2}y_1\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{b^4}{a^4}x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + \frac{a^4}{b^4}y_1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{b^4}{a^4}\left(x_1^2 + \frac{a^4}{b^4}y_1^2\right)}}{\sqrt{x_1^2 + \frac{a^4}{b^4}y_1^2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

(P. A. Larsen.)
(Ogsaa løst af Theodor Ney.)

34. I en Firkant, hvori en Cirkel kan indskrives, ere de overfor hinanden liggende Siders Produkter p_1 og p_2, Diagonalernes Produkt p_3. Find Fladeindholdet.

Opløsning. Låt ABCD vara den gifna fyrhörningen; diagonalerna skära hvarandra i E. Sätt, för korthetens skull, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AE = x$, $BE = y$, $CE = z$, $DE = u$ och $\wedge AED = \varphi$, så fås, om $ac = p_1$, $bd = p_2$, $AC . BD = p_3$,

$$a + c = b + d,$$

således
$$a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2bd + d^2,$$

hvaraf $x^2 + y^2 + 2xy . \cos\varphi + 2p_1 + u^2 + z^2 + 2uz . \cos\varphi$
$= y^2 + z^2 - 2yz . \cos\varphi + 2p_2 + x^2 + u^2 - 2xu . \cos\varphi$,

hvaraf
$$(xy + uz + yz + xu) . \cos\varphi = p_2 - p_1$$

eller
$$(x + z)(y + u) . \cos\varphi = p_2 - p_1 = p_3 . \cos\varphi,$$

i följd hvaraf
$$\cos\varphi = \frac{p_2 - p_1}{p_3},$$

således
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(p_3 + p_2 - p_1)(p_3 + p_1 - p_2)}}{p_3}.$$

Men $ABCD = \frac{p_3}{2} . \sin\varphi$, hvaraf följer, att

$$ABCD = \frac{1}{2}\sqrt{(p_3 + p_2 - p_1)(p_3 + p_1 - p_2)}.$$

(Theodor Ney.)

(Ogsaa løst af L. F. Lautrup-Jørgensen.)

35. I Trekant ABC er D et vilkaarligt Punkt i BC og E et vilkaarligt Punkt i CA. Træk AD og BE, der skære hinanden i F, og bevis, at Forholdet imellem Trekanterne AFB og DFE er det samme som Forholdet mellem Trekanterne ABC og DEC.

Opløsning. $\frac{\triangle AFB}{\triangle DFE} = \frac{AF . BF}{DF . EF}$; $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEC} = \frac{BC . AC}{EC . DC}$.

Nu skæres $\triangle ACD$ af BE, hvorved faas

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{DF}{AF} = 1 \qquad (1);$$

$\triangle BCE$ overskæres af AD, hvorved faas

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{EF}{BF} = 1 \qquad (2).$$

Multipliceres (1) og (2), faar man

$$\frac{BC \,.\, DF \,.\, AC \,.\, EF}{EC \,.\, AF \,.\, DC \,.\, BF} = 1,$$

eller
$$\frac{AF \,.\, BF}{DF \,.\, EF} = \frac{BC \,.\, AC}{EC \,.\, DC},$$

følgelig
$$\frac{\triangle AFB}{\triangle DFE} = \frac{\triangle ABC}{\triangle DEC}.$$

(P. A. Larsen.)
(Ogsaa løst af Theodor Ney.)

37. Tre Kvotientrækker, hver paa n Led, begynde med samme Led; Kvotienterne ere x, x^2, x^3; den andens Sum er mellemproportional mellem de to andres. Find x.

Opløsning. Man har $\frac{1 - x^n}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{3n}}{1 - x^3} = \left(\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}\right)^2,$

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x} \cdot \frac{1 + x^n + x^{2n}}{1 + x + x^2} = \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \cdot \frac{1 + x^n}{1 + x}\right)^2,$$

hvoraf
$$x^n = 1, \quad x = 1^{\frac{1}{n}},$$

og
$$\frac{1 + x^n + x^{2n}}{1 + x + x^2} = \frac{(1 + x^n)^2}{(1 + x)^2} = \frac{x^n}{x} = x^{n-1},$$

$$1 + x^{2n} = x^{n-1} + x^{n+1},$$

$$1 + x^{2n} - x^{n-1} - x^{n+1} = (1 - x^{n-1})(1 - x^{n+1}) = 0.$$

Man faar saaledes Løsningerne

$$x = \begin{cases} 1^{\frac{1}{n-1}} \\ 1^{\frac{1}{n}} \\ 1^{\frac{1}{n+1}} \end{cases} \quad \text{foruden } x = 0.$$

(P. A. Larsen.)
(Ogsaa løst af J. Byskov, der bemærker, at x er ubestemt for n = 1 samt af A. Jørgensen, L. F. Lautrup-Jørgensen og Novalni.)

38. En Pyramide har et Kvadrat til Grundflade, Pyramidens ene Side er vinkelret paa Grundfladen og dannes af en ligesidet Trekant. Gjennem disse to Planers Kant lægges en Plan vinkelret paa den lige overfor liggende Side.

Søg Forholdet mellem de parallele Sider i det ud af Snitplanen skaarne Trapez og Forholdet mellem de to Stykker, hvori Pyramiden deles af Snitplanen.

Opløsning. Kaldes Højden i den ligesidede Trekant (altsaa Pyramidens Højde) h, Kvadratets Side a, Højden i den lige overfor liggende Sidetrekant h_1, haves $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{7}$; en Plan gennem h og h_1 vil fremvise et Snit af Form som en retvinklet Trekant med Hypotenusen $= h_1$, den ene Kathete = a, den anden = h, og Højden = Højden i Trapezet; betegnes denne ved n, Hypotenusens Stykker ved x og y saaledes, at y er Projektionen af h, haves

$$h^2 = y \cdot h_1;\ y = \frac{h^2}{h_1} = \frac{3}{14} a\sqrt{7};\ x = h_1 - y = \frac{2}{7} a\sqrt{7};$$

$$n = \sqrt{xy} = \frac{1}{7} a\sqrt{21}.$$

Den mindste af Trapezets parallele Sider betegnes ved s;

$$\frac{s}{a} = \frac{y}{h_1} = \frac{3}{7}.$$

II. Hele Pyramidens Volumen $= \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $= \frac{1}{6} a^3 \sqrt{3}$.

Det øverste Stykke er en Pyramide, hvis Grundflade er Trapezet og hvis Højde er y. Dets Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{s+a}{2} \cdot n \cdot y = \frac{5}{98} a^3 \sqrt{3}.$$

Det nederste Stykkes Volumen $= \frac{1}{6} a^3 \sqrt{3} - \frac{5}{98} a^3 \sqrt{3}$

$$= \frac{17}{147} a^3 \sqrt{3}.$$

Det søgte Forhold $= \frac{15}{34}$.

(J. Byskov.)

39. I et femcifret Tal er Tværsummen lig 5 Gange midterste Ciffer, Summen af Produkterne af to og to af Cifrene

er 85 og Differensen mellem det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden, og Tallet er 41976. Find Tallet.

Opløsning. Antag, at siffrorna äro i ordning x, y, z, u, v, så fås

$$x + y + z + u + v = 5z \qquad (1)$$

$$xy + xz + xu + xv + yz + yu + yv + zu + zv + uv = 85 \qquad (2)$$

$$10000v + 1000u + 100z + 10y + x$$
$$-(10000x + 1000y + 100z + 10u + v) = 41976,$$

hvilken eqvation genom sammanslagning af termer och division med 99 öfvergår till

$$101(v - x) + 10(u - y) = 424.$$

Som $10(u - y)$ alltid slutar på noll, måste $101(v - x)$ sluta på 4, d.v.s. $v - x = 4$, hvaraf $u - y = 2$ eller $v = 4 + x$ och $u = 2 + y$, hvilka värden på u och v, insatta i (1) ge $x + y + 3 = 2z$, och i (2) $4xy + 2xz + 2yz + 8x + x^2 + y^2 + 10y + 6z = 77$, som, kombinerad med $x + y + 3 = 2z$, gir $x^2 + 3xy + 7x + y^2 + 8y = 34$, hvilken eqvation upplöst med afseende på x gir

$$x = -\frac{3y + 7}{2} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{5y^2 + 10y + 185}}{2}.$$

Låter man nu y antaga alla acceptabla värden från 0 till och med 9, finner man, att $y = 2$ är det enda värde, som gör expressionen under rotmärket till en jemn qvadrat, hvilken är 225. Således fås $x = 1$, $v = 5$, $u = 4$, $z = 3$. Det sökta talet är således 12345.

(Theodor Ney,)

(Ogsaa løst af L. F. Lautrup-Jørgensen.)

40. I et sexcifret Tal er Cifrene fra venstre til højre x, y, z, a, b, c. Mellem disse er følgende Relation:

$$y^2 = 5x + 10z + 3a + b + 3c.$$

Summen af Tallet og det Tal, der skrives med Cifrene i omvendt Orden er 1126730. Find Tallet.

Opløsning. Man har

$$y^2 = 5x + 10z + 3a + b + 3c \qquad (1)$$

$$100000(x+c)+10000(y+b)+1000(z+a)+100(z+a)$$
$$+10(y+b)+x+z=1126730. \qquad (2)$$

(2) reduceres til

$$100001(x+c)+10010(y+b)+1100(z+a)=1126730$$
$$9091(x+c)+910(y+b)+100(z+a)=102430.$$

Heri maa nu, da hvert Ciffer < 10,

$$x+c=10 \qquad (3)$$

altsaa $\quad 90910+910(y+b)+100(z+a)=102430$

$$91(y+b)+10(z+a)=1152,$$

hvoraf $\quad y+b=2$ eller $y+b=12 \qquad (4)$

altsaa enten $\quad 10(z+a)=1152-2.91=970$ (ubr.)

eller $\quad 10(z+a)=1152-12.91=60$

$$z+a=6. \qquad (5)$$

Indsættes nu Værdierne for a, b og c af (3), (4) og (5) i (1), faaes

$$y^2+y-7z-2x=18+12+30=60$$
$$y=\frac{-1+\sqrt{1+28z+8x+240}}{2},$$

hvor $\quad 28z+8x+241=t^2$ (t ulige og < 20.)

$$28z+8x=t^2-241. \quad (t>\sqrt{241}>15)$$
$$\text{ɔ:} \quad t=\begin{cases}17\\19\end{cases}.$$

$t=17$ giver $\quad 28z+8x=48,$

$$7z+2x=12,$$
$$z=0,\ x=6,\ y=8,$$
$$b=4,\ a=6,\ c=4,$$

Tallet: $\quad$ 680644.

$t=19$ giver $\quad 7z+2x=30$

$$z=\begin{cases}4\\2\end{cases},\quad x=\begin{cases}1\\8\end{cases},\quad y=9,$$
$$c=\begin{cases}9\\2\end{cases},\quad a=\begin{cases}2\\4\end{cases},\quad b=3,$$

Tallet: $\quad$ 194239 eller 892432.

(A. Jørgensen, L. F. Lautrup-Jørgensen, Theodor Ney.)

43. Bevis, at n (n + 2) (5n — 1) (5n + 1) er delelig med 24, naar n er et vilkaarligt helt Tal.

Opløsning. Størrelsen er delelig med 3, thi hvis 3 hverken gaar op i 5n + 1 eller i 5n — 1, maa det gaa op i det mellemliggende Tal 5n ɔ: i n. 8 gaar op i Størrelsen, thi enten er n og n + 2 eller 5n + 1 og 5n — 1 to paa hinanden følgende lige Tal.

(P. A. Larsen.)

(Ogsaa løst af J. Byskov, A. Jørgensen og L. F. Lautrup-Jørgensen.)

44. A og B ere to faste Punkter, beliggende henholdsvis paa en given Linie AA' og en given Cirkel C. En vilkaarlig Cirkel gjennem A og B skære AA' i a og C i b. Bevis, at ab gaar igjennem et fast Punkt.

Opløsning. Låt linierna AB och ab skära cirkeln C i punkterna D och d respektiva samt drag linierna Dd och Bb, så är $\wedge$ BDd = $\wedge$ Bba = $\wedge$ aAB, följaktligen Dd $\parallel$ Aa, hvaraf följer, att d är den fixa punkten.

(Theodor Ney.)

(Ogsaa løst af B — x.)

45. Idet man ved R_A og R'_A betegner Radierne i de Cirkler, der røre Siderne ved A i Trekant ABC samt dennes omskrevne Cirkel, den første indvendigt, den anden udvendigt, har man

$$\frac{R_A}{R'_A} + \frac{R_B}{R'_B} + \frac{R_C}{R'_C} = 1.$$

Opløsning. Kallas den omskrifna cirkelns radie R; dess medelpunkt O och den invändigt tangerande cirkelns medelpunkt M, samt dragas linierna AO, AM, OM, af hvilka AO skär den omskrifna cirkeln i Q samt OM går genom förutnämda cirklars tangeringspunkt, så är

$$\wedge \text{MAO} = \frac{\alpha}{2} - \wedge \text{BAQ} = \frac{\alpha}{2} - 90^0 + \wedge \text{BQA}$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^0,$$

$$\therefore \quad \cos \wedge \text{MAO} = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right).$$

Vidare är $R_A = AM \sin\frac{\alpha}{2} = R - OM$; således

$$OM = R - AM \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$R^2 - 2R \,.\, AM \sin\frac{\alpha}{2} + \overline{AM}^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = OM^2$$

$$= R^2 - 2R \,.\, AM \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) + \overline{AM}^2.$$

Häraf fås $AM = 2R \,.\, \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

och således

$$R_A = 2R \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

På samma sätt fås

$$R_A' = 2R \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Följaktligen är $\dfrac{R_A}{R'_A} = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) + \sin\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}{2 \cos\frac{\gamma}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

På samma sätt fås

$$\frac{R_B}{R'_B} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ och } \frac{R_C}{R'_C} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Således är

$$\frac{R_A}{R'_A} + \frac{R_B}{R'_B} + \frac{R_C}{R'_C} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

(Theodor Ney.)

47. D og E være Skæringspunkterne mellem den vinkelrette paa Midten af Siden BC i Trekant ABC og de vinkelrette oprejste i B og C henholdsvis paa AB og AC. O være Centrum, R Radius i Cirklen ABC. Bevis, at

$$OD \,.\, OE = R^2.$$

Opløsning. $\angle BOD = \angle EOC = A;$

$$\angle OBD = \angle OBC + \angle CBD = 90^0 - A + 90^0 - B = C;$$

$$\angle OEC = 90^0 - (90^0 - C) = C;$$

$$\triangle BOD \sim \triangle EOC, \text{ hvoraf følger}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OD}{OC} \text{ eller } OD \,.\, OE = R^2.$$

(P. A. Larsen.)

(Ogsaa løst af Theodor Ney og B—x.)

50. AOB og COD ere Diametre i en Cirkel. Bestem Vinklen AOC, naar Segmenterne AC og AD ved Drejning om AOB frembringe Voluminer, der forholde sig som $\frac{1}{3}$.

Opløsning. Drag linierna CE och DF vinkelräta mot AEOFB. Beteckna S_1 och S_2 de volymer, som sektorerna AOC och AOD resp. alstra, så är, om $\wedge AOC = \varphi$,

$$S_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 \,.\, AE = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\varphi)$$

och $$S_2 = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 + \cos\varphi).$$

Beteckna nu V_1 och V_2 de af segmenterna AC och AD alstrade volymerna, så fås

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\varphi) - \frac{\pi}{3} \,.\, \overline{CE}^2 \,.\, AO$$

$$= \frac{\pi r^3}{3} \,.\, (1 - \cos\varphi)^2$$

och $$V_2 = \frac{\pi r^3}{3} \,.\, (1 + \cos\varphi)^2,$$

hvaraf $$\frac{1}{3} = \left(\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)^2 = \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

(Theodor Ney.)

Opgaver til Løsning.

55. Paa en Vædske med Vægtfylden f svømmer et Legeme og har $\frac{1}{m}$ af sit Rumfang over Vædsken. En paaheldt ny Vædske, der helt dækker over Legemet, bringer dette til at have $\frac{1}{n}$ af sit Rumfang over den første Vædske. Find den paaheldte Vædskes Vægtfylde.

(Chr. Hansen.)

56. Forbindelseslinierne mellem Vinkelspidserne ABC i en Trekant og et vilkaarligt Punkt i dennes Plan skære de modstaaende Sider i $A_1B_1C_1$. Lad A_1C_1 og B_1C_1 skære henholdsvis BB_1 og AA_1 i B_2 og A_2. Det skal bevises, at Linierne AB_2 og BA_2 skære hinanden paa Linien CC_1.

(J. L. W. V. Jensen.)

57. Et Multiplum af 63 skrives i Ottetalsystemet med fem Cifre saaledes beskafne, at Forholdet mellem Summerne af de to sidste og de to første er 3 større end det mellemste. Bestem Tallet.

(P. A. Larsen.)

58. a) Bestem Summen af de Vinkler, hvis tgg. ere Rødderne i Ligningen:

$$x^{10} - 3x^9 + 7x^8 - x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 11x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0.$$

b) Løs samme Opgave med Hensyn til den almindelige Ligning af n^{te} Grad i x.

(Johs. Petersen.)

59. Fra Endestationerne paa en Sporvejslinje afgaar hvert 9de Minut en Sporvogn. Der er 6 Skiftespor paa Strækningen mellem Stationerne. Man skal finde, hvor lang Tid en Sporvogn er om at kjøre hele Vejen mellem Stationerne.

(Carl Otterstrøm.)

Korrespondance.

Spørgsmaal 1. Hvorledes løses Opgaven Nr. 17 i Jul. Petersens Algebra, Rentesregning.

2. Hvor finder man en nogenlunde udførlig elementær Fremstilling af Methoder til Løsning af Maximums- og Minimumsopgaver?

Bsk.

Svar. ad 1. Den omspurgte Opgave, der lyder: »To Kar rummer hvert 100 Potter; det ene er fyldt med Vin, det andet med Vand; samtidig tages der en Pot op af hvert Kar og heldes over i det andet Kar; hvad er der i Karrene, naar denne Operation er gjentaget 20 Gange?« — kan løses saaledes:

af elementære Methoder til Løsning af geometriske Max.- og Min.-Opgaver.

* * *

Hr. C. J. Busk. Deres Forespørgsel angaaende Vivianis Theorem skal blive besvaret i næste Nr.

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling B.

Første Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1890.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
83231
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1897.

Indhold.

Side

L. Ankjær, stud. mag.
(Sé løste Opgaver.)

A. S. Bang, stud. mag.
(Sé Opgaver til Løsning.)

C. Crone, dr. phil., Lærer ved Søofficersskolen.
(Sé Literaturanmeldelse).

P. T. Foldberg, cand. mag.
Integration af exakte Differentialkvotienter af Formen $\varphi(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^ny}{dx^n})$ 23
(Sé desuden Opgaver til Løsning).

A. W. Høst, stud. mag.
(Sé løste Opgaver).

J. L. W. V. Jensen, Ingeniør.
(Sé løste Opgaver og Opgaver til Løsning.)

C. Juel, dr. phil.
Om Opgaver med uendelig mange Opløsninger 11
(Sé desuden Opgaver til Løsning).

A. L — n i Stockholm.
(Sé løste Opgaver.)

A. Lindhagen, dr. phil.
Om medelriktningen af en bruten eller krokig linie i planet 80

L. Lorenz, dr. phil., Etatsraad.
Valgkredssystemet og Minoriteten 40
En diskontinuert Faktor 76

C. Seidelin, Docent ved polyteknisk Læreanstalt.
Axonometrisk Afbildning 49

T. N. Thiele, dr. phil., Prof. ved Universitetet.
Et Stykke Arvegods fra Professor Oppermann 33
Om Kredsvalgproblemet 56
(se desuden Opgaver til Løsning.)

Side

H. G. Zeuthen, dr. phil., Professor ved Universitetet.

Om Omdannelse af Differentialligninger med to Variable ved Indførelse af Liniekoordinater 1

Bevis for at en algebraisk Ligning altid har en Rod 65

Analytisk Løsning og nogle Almindeliggjørelser af den Opgave: paa en Kugle at finde en Kurve med konstant Krumning 67

Løste Opgaver.

1, 3 (L. Ankjær) 63

4 (A. L—n, A. W. Høst, J. L. W. V. Jensen) 91

Opgaver til Løsning.

1—8 (Gauss, Thiele, P. T. Foldberg, C. Juel) 31

9—18 (Thiele, Chr. Hansen, A. S. Bang, J. L. W. V. Jensen) 94

Examensopgaver.

Polyteknisk Examen for Ingeniører 27

— - Kemikere 47

Opgaver til Afgangsexamen ved Søofficersskolen 83

Opgaver ved Magisterkonferenser 87

Literaturanmeldelse.

H. Valentiner, Elementær Sphærisk Trigonometri (C. Crone) 82

Om Omdannelse af Differentialligninger med to Variable ved Indførelse af Liniekoordinater.

Af H. G. Zeuthen.

Naar man skal integrere en Differentialligning, som ikke umiddelbart henhører under en bekjendt Form, vil man i Reglen forsøge paa ved en Transformation at føre den tilbage til en saadan. Bedst Udsigt til, at dette vil lykkes, har man i det Tilfælde, hvor den forelagte Ligning selv er lavet ved Anvendelse af den omvendte Transformation paa en bekjendt integrabel Differentialligning, og det kan da være en ganske god Øvelse at efterspore den anvendte Dannelsesmaade og derved finde Løsningen af den forelagte Opgave.

Naar man derimod vil anvende denne Fremgangsmaade paa en Differentialligning, hvorom man ikke forud véd, om den kan integreres, er derved den Mislighed, at man efter forgjæves at have forsøgt dette ikke kan vide, om Grunden hertil er, at man ikke endnu har været heldig nok til at finde den virkelig brugelige Transformation, eller den, at en saadan slet ikke existerer, men at tvertimod Ligningen ikke kan integreres ved simplere Funktioner end dem, som den selv definerer. Det er og maa være Gjenstanden for de mere indgaaende videnskabelige Undersøgelser at afhjælpe denne Vanskelighed ved at opsøge almindelige Kjendetegn paa, om Differentialligninger ved visse Hovedklasser af Transformationer kunne overføres til hinanden, og derved paa, om vilkaarlig forelagte Differentialligninger ved en saadan Transformation kunne simpli-

ficeres. Derimod afhjælpes Vanskeligheden kun i ringe Grad ad den mere elementære Vej at udvide Samlingen af bekjendte integrable Differentialligninger ved at anvende simple Transformationer paa dem, der forud kjendes; thi da Antallet af Transformationer, som herved kunne benyttes, er ubegrænset, vil den derved virkelig opnaaede Udvidelse dog bestandig være af forsvindende Betydning overfor Spørgsmaalet om et almindeligt Herredømme over alle Differentialligninger. Om man i et elementært Kursus vil medtage en Klasse Ligninger, som er dannet ad denne Vej, og som altsaa ved den omvendte Transformation kunne føres tilbage til forud bekjendte Ligninger, maa derfor udelukkende bero paa deres egen Betydning og Beskaffenhed, dels paa om de selv eller de Ligninger, hvortil deres Integration fører, eller de Kurver, som de fremstille, frembyde en analytisk eller geometrisk Interesse, eller indbefatter Ligninger, som forekomme i Mathematikens Anvendelser, dels paa om de have saa simple Kjendemærker, at de derved blive godt skikkede til at erindres. Dette sidste gjælder f. Ex. om homogene Ligninger, der tillige ved at fremstille saa simple Kurvesystemer som ligedannede og ligedan beliggende Kurver og ved Homogeneitetens store Betydning i alle Mathematikens Anvendelser overalt ville hævde deres Betydning. Homogene Ligninger ere indbefattede i den større Klasse af Ligninger, som kunne integreres enten ved Substitutionen $\frac{y}{x} = z$ eller ved Overgang fra retvinklede til polære Koordinater, og Kjendskabet til homogene Ligningers Behandling vil altsaa kunne lede paa Spor efter Muligheden af at løse andre Ligninger ved disse samme Transformationer, medens der næppe vilde være Grund til at opstille almindelige Kjendetegn paa de Ligninger, for hvis Vedkommende dette vil lykkes.

Naar vi nu her ville fremdrage en anden af de uendelig mange Transformationer, som ere mulige, er det kun fordi ogsaa den har særlig Betydning. Den bestaar i en Ombyt-

ning af Punkt- og Liniekoordinater. En Differentialligning af første Grad i de retvinklede Koordinater x og y udtrykker en Sammenhæng mellem Beliggenheden af en Tangent til en Kurve og dens Berøringspunkt; men en saadan Forbindelse lader sig aabenbart lige saa nemt udtrykke i Liniekoordinaterne til Tangenten, idet Differentialkoefficienten da bestemmer det paa denne beliggende Røringspunkt. Det vil strax være klart for den, der blot kjender noget til Dualitetsprincipet, at den her nævnte Transformation ikke blot som andre Transformationer vil forøge Antallet af Ligninger, som man kan integrere uden Famlen, men baade vil have særlig gode Chancer for at kunne gjøre Nytte ved Behandling af geometriske Opgaver og ved det dobbelte Synspunkt give en klarere Indtrængen i Differentialligningernes Natur. Indførelsen deraf vil ogsaa fuldkommen retfærdiggjøres ved de Anvendelser, som ville blive gjorte deraf.

Som Liniekoordinater skulle vi ikke her bruge dem, der findes i min og senere i Prof. Jul. Petersens analytiske Geometri, men derimod Konstanterne i den rette Linies Ligning, som vi af Hensyn til Ensartetheden af de to Overgange, som skulle fremstilles, ville skrive

$$y = px - q.$$

Det maa altsaa erindres, at p er Liniens Retningskoefficient og q er det paa Ordinataxen afskaarne Stykke med modsat Tegn. p og q ere bekvemme Liniekoordinater, da de paa et Fortegn nær ere Forhold mellem Koefficienter i den almindelige Ligning af første Grad, og da Betingelsen for, at Linien gaar gjennem et Punkt, bliver en Ligning af første Grad i p og q. Derved bliver Betingelsen for, at den skal berøre et Keglesnit, eller mere almindelig en Kurve af n'te Klasse, af anden eller n'te Grad i p og q. For det følgendes Skyld maa det erindres, at en ret Linie ikke kan bestemmes ved én Ligning i Liniekoordinater, men først ved to Ligninger, ligesom Bestemmelsen af et Punkt ved Punktkoordinater kræver to Ligninger.

Skal den rette Linie (p, q) berøre en Kurve i Punktet (x, y), maa man have

$$y + q = px, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

hvor $\frac{dy}{dx}$ bestemmes af Kurvens Ligning i Punktkoordinater. Da ifølge denne Ligning — hvad enten denne er bekjendt eller først skal findes ved en Integration — y bliver Funktion af x, maa p og q ogsaa blive det ifølge Ligningerne (1). Man finder ved Differentiation af den første af disse, idet man reducerer ved den sidste,

$$\frac{dq}{dx} = x\frac{dp}{dx} \text{ og altsaa } \frac{dq}{dp} = x. \tag{2}$$

Overgangen fra en Differentialligning af første Orden i x og y til en Differentialligning i p og q foretages altsaa ved Ligningerne

$$x = \frac{dq}{dp}, \quad y = p\frac{dq}{dp} - q, \quad \frac{dy}{dx} = p, \tag{3}$$

og den omvendte Overgang ved Ligningerne

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = x\frac{dy}{dx} - y, \quad \frac{dq}{dp} = x. \tag{4}$$

Har man ved Ligningerne (3) omdannet en Differentialligning i x og y

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{5}$$

til Ligningen

$$f(\frac{dq}{dp}, p\frac{dq}{dp} - q, p) = 0 \tag{6}$$

og integreret denne ved

$$F(p, q) = 0 \tag{7}$$

hvor Funktionen F indeholder en arbitrær Konstant eller ikke, eftersom Integralet er fuldstændigt eller singulært, findes den primitive Ligning i x og y ved at borteliminere p og q mellem (5), hvor $\frac{dy}{dx} = p$, (7) og den første Ligning (1).

Vi ville først anvende Transformationen paa den bekjendte Differentialligning

$$y = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) . x + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{8}$$

som derved gaar over til den lineære Differentialligning

$$\left(p - \varphi(p)\right) \frac{dq}{dp} - q = f(p). \tag{9}$$

Sammensætningen af denne er noget simplere end den, som man opnar ved den i Lærebøgerne brugelige Differentiation af Ligning (8), en Behandling af Differentialligninger, som skyldes Monge. Dette skulle vi her særlig fremhæve, ej blot fordi der er visse Berøringspunkter mellem denne Behandling og Indførelse af Liniekoordinater; men særlig fordi Monge i det mindste andensteds har anvendt en Fremgangsmaade. der staar den her beskrevne nær. Efter en kort Notits*) om en tabt Afhandling fra 1808 om reciproke Flader, har han nemlig defineret Koordinaterne til et Punkt af en reciprok Flade til en given ganske paa samme Maade som vi, hvis vi vilde udstrække nærværende Behandling af Differentialligninger i x og y og de derved fremstillede plane Kurver til partielle Differentialligninger og Flader, maatte definere Plankoordinaterne til den givne Flades Tangentplaner.

Ligning (8) indbefatter som bekjendt Clairaut's Differentialligning

$$y = \frac{dy}{dx} . x + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{10}$$

I dette Tilfælde, hvor $\varphi(p) = p$ gaar Differentialligningen (9) over til Ligningen

$$q = - f(p), \tag{11}$$

som ikke mere indeholder nogen Differentialkoefficient. Den er imidlertid dannet saaledes af selve den givne Differentialligning (10), at den udtrykker den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at denne er opfyldt. Selv kan den tilfredsstilles paa to forskjellige Maader, der begge føre til en enkelt Ligning i Punktkoordinater. Den ene faas ved at lade p være konstant

*) S. Monge: Application de l'analyse à la géométrie S. IV.

og bestemme q ved Ligning (11). Man faar da den rette Linie

$$y = px + f(p), \qquad (12)$$

og lader man Konstanten p være arbitrær, bliver (11) det fuldstændige Integral. Den anden faas, naar i (11) p og q variere. Denne bliver da Ligningen i Liniekoordinater for en Kurve. For at faa dens Ligning i Punktkoordinater maa man først differentiere, hvorved faas

$$x = \frac{dq}{dp} = - f'(p), \qquad (13)$$

og dernæst bortelimiriere p mellem denne Ligning og den givne skreven under Formen (12). Da den saaledes fundne Ligning ikke er indbefattet i det fuldstændige Integral, hvor p var konstant, maa den være et singulært Integral*).

Det her beskrevne Tilfælde, at man i Stedet for en Differentialligning i p og q kun faar en Ligning af Formen

$$F(p, q) = 0,$$

kan — forsaavidt den givne Differentialligning (5) ikke ved Opløsning i Produkt spalter sig i flere indbyrdes uafhængige Ligninger — ifølge (4) kun indtræde naar den givne Ligning har Formen

$$F\left(\frac{dy}{dx}, x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

eller med andre Ord, naar den ved Løsning med Hensyn til y antager Clairaut's Form. Kun i dette Tilfælde fremstiller det fuldstændige Integral en Samling rette Linier.

Derimod skulle vi nu undersøge, hvorledes singulære, eller maaske partikulære Integraler, der fremstille rette Linier, kunne vise sig. Et saadant maa bestemmes ved et Par konstante Værdier af p og q. Disse skulle, naar p ikke er uendelig, tilfredsstille den af den givne Ligning (5) udledte Ligning (6) uafhængig af $\frac{dq}{dp}$; thi denne Værdi skal være Abscissen x til

---

*) Jeg foretrækker denne Benævnelse, som nu er den sædvanlige i fremmede Sprog, for det mindre klare Udtryk »partikulære Opløs[illegible]

Berøringspunktet, som jo netop her skal kunne være et vilkaarligt Punkt af Linien. Naar Retningskoefficienten $p = \infty$, bliver denne Bestemmelsesmaade ubrugelig, idet da alle Liniens Punkter faa samme Abscisse, men Undersøgelsen af, om der er noget Integral, der fremstiller en med Ordinataxen parallel Linie, kan foretages ved at ombytte x og y, altsaa ved at sætte $\frac{dx}{dy} = p'$, $y\frac{dx}{dy} - x = q'$ og prøve, om den derved fremkomne Ligning uafhængig af $\frac{dq'}{dp'}$ tilfredsstilles af $p' = 0$, $q' =$ Konstant.

Paa samme Maade ville de Integraler i Ligning (6), der fremstille Punkter, bestemmes ved de Værdier af x og y, som tilfredsstille Ligning (5) uafhængig af $\frac{dy}{dx}$. Hvis de ere singulære Integraler, ville de ved det fuldstændige Integral fremstillede Kurver gaa derigjennem.

Bortset fra de her nævnte Tilfælde vil Ligning (5) og Ligning (6) samtidig komme til at indeholde henholdsvis $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{dq}{dp}$, og et Integral til den første Ligning vil i Punktkoordinater fremstille den samme Kurve, som den anden fremstiller i Liniekoordinater. Integralerne ville samtidig være partikulære eller singulære.

Medens man altid, naar man ikke kan finde nogen anden Maade at integrere en Ligning paa, kan forsøge, om ikke den her beskrevne Transformation skulde føre til en integrabel Ligning, er det dog værd særlig at lægge Mærke til de Tilfælde, hvor i alt Fald en væsentlig Reduktion er at vente. Dette vil finde Sted, naar den givne Ligning (5) er af højere Grad i $\frac{dy}{dx}$ end i x og y; thi Ligning (6) vil være af samme Grad i $\frac{dq}{dp}$ og q, som (5) er det i x og y. Derfor var det, at Transformationen ved Anvendelse paa Ligning (8), som er af

förste Grad i x og y, førte til en lineær Differentialligning i p og q.

Særlig Opmærksomhed fortjener det Tilfælde, hvor Ligning (6) bliver af lavere Grad i $\frac{dq}{dp}$, end (5) er det i x og y. Det indtræder naar $x\frac{dy}{dx} - y = q$ er Faktor i det Polynomium, som dannes af Leddene af højest Grad i x og y i Ligning (5). Et Exempel herpaa havdes allerede i Clairaut's Ligning, som førte til en Ligning af Graden 0 i $\frac{dq}{dp}$. Et andet er følgende Ligning

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - a^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0, \qquad (a)$$

der ogsaa kan skrives

$$\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = a^2\frac{dy}{dx}. \qquad (b)$$

Den bliver til

$$(1 + p^2)\,q\frac{dq}{dp} - pq^2 = a^2 p, \qquad (c)$$

som aabenbart er lineær i q^2 og ved Integration giver

$$q^2 = k(1 + p^2) - a^2. \qquad (d)$$

Den givne Lignings Integral findes ved at borteliminere p og q mellem selve denne Ligning, som (smlgn. (c)) kan skrives

$$(q^2 + a^2)\,p = qx(1 + p^2), \qquad (e)$$

Ligning (d) og Ligningen

$$y = xp - q. \qquad (f)$$

Eliminationen foregaar let, idet (d) og (e) give*) $kp = qx$. Man finder

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - a^2} = 1, \qquad (g)$$

som tilhører en Række konfokale Keglesnit. Man kommer til samme Differentialligning og derved til det samme fuld-

---

*) Herved lade vi dog Løsningen $p^2 + 1 = 0$, som i Liniekoordinater fremstiller de uendelig fjerne Cirkelpunkter, upaaagtet.

stændige Integral, naar man søger de samme Keglesnits retvinklede Trajektorier.

Som før bemærket kan man af Differentialligningen (c) i p og q udlede de Integraler til den givne, som fremstille rette Linier. Ligning (c) vil uafhængig af $\frac{dq}{dp}$ tilfredsstilles af $p = 0$, $q = 0$, hvortil svarer Abscisseaxen $y = 0$, men ikke af andre konstante og endelige Værdipar af p og q. I Stedet for at undersøge Tilfældet $p = \infty$, kan man, som ogsaa bemærket, i den givne Ligning sætte $\frac{dx}{dy} = p'$ og $y\frac{dx}{dy} - x = q'$. Da den derved fremkomne Ligning kun afviger fra (c) ved Fortegnet for a^2, bliver ogsaa Ordinataxen $x = 0$ et Integral. Disse to Integraler faas af (g) ved $k = a^2$ og $k = 0$ og ere altsaa blot partikulære.

Et andet Exempel paa Differentialligninger, som paa samme Maade reduceres ved Indførelse af Liniekoordinater, haves i dem, der tilhører Projektionerne af Krumningslinierne i en Flade af anden Orden paa et Hovedsnits Plan.

Den her udviklede Transformation kan ogsaa anvendes paa Ligninger af højere Orden, naar man blot ved Differentiation fortsætter Udtrykkene (3) og (4). Man faar af de sidste Ligninger (3) og (4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{og} \quad \frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp}$$

altsaa, idet vi ved y', y'', y''' ... og q', q'', q''' ... betegne Differentialkvotienterne af forskjellig Orden af y med Hensyn til x og af q med Hensyn til p,

$$y'' = \frac{1}{q''} \tag{14}$$

Fortsat Differentiation giver

$$\left.\begin{aligned} y''' &= -\frac{1}{q''^2}q'''\cdot\frac{dp}{dx} = -\frac{q'''}{q''^3} \\ y^{IV} &= -\frac{q''\,q^{IV} - 3\,q'''^2}{q''^5} \quad \text{o. s. v.} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ved Fortsættelse vil man bestandig finde, at $y^{(n)}$ eller

$\frac{d^n y}{dx^n}$ er af Graden — (n — 1) i q og dens Differentialkvotienter q′, q″ ... Man kunde bevise dette almindelig ved paa sædvanlig Maade at gaa fra n til n + 1, men det er ogsaa en simpel Følge af den rent geometriske Homogeneitet. Idet x og y fremstille Længder, maa det samme være Tilfældet med deres Differentialer, af hvilken Orden disse end ere. $d^n y$ og dx ere altsaa begge af første Grad, følgelig $y^{(n)}$ af Graden — (n — 1). Nu er tillige $p = \frac{dy}{dx}$ af Graden 0, $q = px - y$ af Graden 1. Deraf følger, at ogsaa dp er af Graden 0, Differentialerne af q af Graden 1, og altsaa ogsaa at x og y maa være af første Grad og $\frac{d^n y}{dx^n}$ af Graden — (n — 1) i q, q′, q″ ...

Heraf følger en betydningsfuld almindelig Anvendelse af vor Ændring, idet den vil tilvejebringe en Forbindelse mellem de to Arter af homogene Differentialligninger, for hvilke man i Lærebøgerne giver Regler til at formindske Ordenen med en Enhed.

Lad Ligningen

$$f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$$

være geometrisk homogen i x og y, altsaa homogen, naar man tillægger $y^{(r)}$ Graden — (r — 1). Den vil da ved vor Substitution omdannes til en Ligning, som er homogen i q, q′, q″ ... $q^{(n)}$. Denne reduceres til en Ligning af Ordenen n — 1 ved Substitutionen $q = e^{\int t dp}$. Man vil opnaa samme Reduktion af den oprindelige Ligning ved i denne (ifølge Formlerne (3)) umiddelbart at indsætte

$$x = t \,.\, e^{\int t dp}, \quad y = e^{\int t dp}(pt - 1), \qquad (16)$$

$y' = p$ og de Udtryk for y'' og y''', som efterhaanden dannes ved Differentiation. Kan den derved fundne Ligning af Ordenen n — 1 integreres, faas den primitive Ligning i x og y ved at borteliminere p og t mellem det fundne Integral og Ligningerne (16), hvor man da giver $e^{\int t dp}$ en arbitrær Faktor paa Grund af det i Exponenten indgaaende Integral.

Om Opgaver med uendelig mange Opløsninger.

Af C. Juel.

Blandt de Opgaver, som i flere forskjellige Former have tiltrukket sig Geometrernes Opmærksomhed, hører den, hvor en stillet Opgave har uendelig mange Løsninger, saafremt der findes én saadan. Som den berømteste af disse kan nævnes Poncelets Bestemmelse af en Polygon, der er omskreven om et og indskreven i et andet Keglesnit; han beviste nemlig, at naar der findes én saadan Polygon, vil der findes uendelig mange andre.

Man kan nu i al Almindelighed nogenledes klare, hvad der maa være den væsentlige Aarsag til den nævnte Særegenhed. Opstiller man nemlig Betingelserne for Opgavens Løsning i almindelig analytisk Form, vil man, forsaavidt Antallet af Betingelser og af Ubekjendte er det samme, komme til en Endeligning i en af de Ubekjendte, der har et vist endeligt Antal Løsninger. Hvis det nu ved en speciel Opgave viser sig, at der i Almindelighed existerer et netop lige saa stort Antal af uegentlige Løsninger, d. v. s. Løsninger, der tilfredsstille de samme Betingelsesligninger, men ikke Opgaven i den bestemte geometriske Form, hvori den er stillet, saa vil Existensen af en egentlig Løsning medføre uendelig mange andre; en Ligning, der har flere Rødder end dens Grad angiver, maa nemlig være identisk. Fordelingen af de uendelig mange Løsninger bør dog bagefter undersøges paa selve Figuren.

Til nærmere Forklaring af denne Opfattelse, der med Styrke er fremsat af den tydske Mathematiker Hurwitz (1879)*), kunne vi netop tage Poncelets Sætning; da det alene skal tjene til Illustration, ville vi holde os til det Tilfælde, at Polygonen har et lige Antal af Sider.

Methoden bestaar da i, at man tegner en Polygon P_1 P_2

*) Math. Ann. Bd. 15, S. 8.

... P_{2n+1}, der er indskreven i et Keglesnit α og omskreven om et andet Keglesnit β, idet man vælger Punktet P_1 vilkaarligt paa α, derfra trækkes en Tangent til β, der anden Gang skjærer α i P_2, og saaledes videre til man tilsidst kommer til et Punkt P_{2n+1}, der skal falde sammen med P_1, naar Polygonen lukker sig. Da man kan trække to Tangenter fra P_1 til β, vil der til hvert Punkt P_1 svare to Punkter P_{2n+1} og omvendt til hvert Punkt P_{2n+1} to Punkter P_1. Efter sædvanlige Principer maa da den Endeligning, der bestemmer Parametren til hvert saadant Punkt paa α, hvor P_1 kan falde sammen med P_{2n+1}, være af fjerde Grad. Men dennes fire Rødder ville her i Almindelighed svare til uegentlige Løsninger. Man kan nemlig konstruere en (ikke lukket) n-kant A_1 A_2 ... A_n A_{n+1}, der er indskrevet i α, og hvis første Vinkclspids A_1 er et Skæringspunkt mellem α og β, medens alle Siderne A_1 A_2, A_2 A_3 ... A_n A_{n+1} berøre β. Betragter man nu det sidste Punkt A_{n+1} som Punkt P_1, har man i den Polygon, hvis Sider ere A_{n+1} A_n, A_n A_{n-1} ... A_2 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3 ... A_n A_{n+1}, dannet en 2n-kant, der tilfredsstiller Betingelserne. Af saadanne uegentlige Løsninger findes der fire, da α og β i Almindelighed have fire Skæringspunkter. Existerer der altsaa endnu en egentlig Løsning- vil der være uendelig mange, der her ubetinget maa ligge saaledes, at ethvert Punkt af α kan vælges som den første Vinkelspids i Polygonen.*)

Naar jeg har tænkt her at give en Oversigt over simple Exempler paa den Art Opgaver, hvor en egentlig Løsning medfører uendelig mange andre, har det været naturligt i et typisk Exempel at gjengive den ovennævnte frugtbare Bevismaade. Men paa den anden Side kan det bemærkes, at en saadan almindelig Methode paa ingen Maade gjør andre mere specielle Betragtningsmaader overflødige. Allerede den aller-

*) Det fortjener at bemærkes, at for Polygoner med et lille Sideantal (i hvert Fald op til en Femkant) var Sætningen allerede i forrige Aarhundrede Aarhundrede bevist af Euler og Fuss paa den Maade, at de beregnede Afstanden mellem en omskreven og en indskreven Cirkels Centrum og efterviste, at denne Afstand alene er afhængig af Cirklernes Radier.

første Sætning, nemlig Poncelets Theorem i sin oprindelige Skikkelse ses ingenlunde umiddelbart ad den Vej. Denne Sætning lyder nemlig:

Haves et Bundt af Keglesnit α β_1 $\beta_2 \ldots$ β_n, vil man i α kunne indskrive uendelig mange Polygoner, hvis Sider, tagne i en bestemt Orden, berøre henholdsvis β_1 $\beta_2 \ldots$ β_n, saafremt der existerer én saadan Polygon; ethvert Punkt af α kan da vælges som den første Vinkelspids.

Poncelet fører Beviset herfor ved først at omprojicere Bundtet saaledes, at Keglesnittene gaa over til Cirkler; dette kan altid gjøres, men Perspektivcentret bliver rigtignok kun reelt, naar Keglesnittene have to og kun to adskilte reelle Skæringspunkter. Dernæst føres Beviset i det væsentlige ad elementær geometrisk Vej. Det samme er ad en lignende, men lidt simplere Vej udført af Hr. Polayrach i en Artikel i Nouv. Ann. 2 S. Bd. XIX (1880).

Følgende elementære Bevis benytter lidt af begge de ovennævnte.

Vi begynde med at betragte en Trekant $A_1\, A_2\, A_3$, der der er indskrevet i en Cirkel α, medens to af Siderne $A_1\, A_2$ og $A_2\, A_3$ herøre hver sin Cirkel β_1 og β_2 i et Bundt, der ogsaa indeholder α. Det gjælder da om at bevise, at Siden $A_1\, A_2$ ogsaa vil berøre en fast Cirkel i samme Bundt.

Lad $A_1'\, A_2'\, A_3'$ være en uendelig nærliggende Trekant, der tilfredsstiller de samme Betingelser, og lad Siderne berøre hver sin Indhyllingskurve henholdsvis i R_1, R_2 og R_3. Man ser da let, at man har

$$\frac{A_1\, R_1}{A_2\, R_1} = -\frac{A_1\, A_1'}{A_2\, A_2'}$$

og de analoge, hvoraf ved Multiklikation

$$\frac{A_1\, R_1}{A_2\, R_1} \cdot \frac{A_2\, R_2}{A_3\, R_2} \cdot \frac{A_3\, R_3}{A_1\, R_3} = -1. \qquad (1)$$

Det kommer dernæst an paa at bevise, at en af de Cirkler β_3, i Bundtet $(\alpha\beta)$, der berøre Siden $A_1\, A_3$, netop vil berøre i et

Punkt R_3', der falder sammen med det Punkt R_3, der bestemmes ved (1). Nu er en Cirkel i to givnes Bundt geometrisk Sted for de Punkter, hvis Potenser med Hensyn til de to Cirkler staa i et konstant Forhold, der er lig det, hvori den tredie Cirkels Centrum deler de førstes Centerlinie. Ere da $O\ O_1\ O_2\ O_3$ Centrer for Cirklerne $\alpha\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3$, har man altsaa:

$$\frac{\overline{A_1 R_1}^2}{\overline{A_1 R'_3}^2} = \frac{\overline{O\ O_1}}{\overline{O\ O_3}}$$

og de analoge, hvoraf ved Multiplikation og Kvadratrodsuddragning netop faas (1), hvor R_3 er ombyttet med R_3', dog med ubestemt Fortegn foran Ligningens andet Led. Dette betyder, at der i Bundtet findes to Cirkler β_3 og β_3', der berøre $A_1\ A_2$, hvad der jo er bekjendt nok, men sikkert er det, at den ene af disse vil berøre $A_1\ A_3$ i det Punkt, hvori $A_1\ A_3$ berører sin Indhylllingskurve. Naar nu $A_1\ A_3$ flyttes kontinuert, maa dens Indhyllingskurve derfor ogsaa indhylles af et kontinuert System af Cirkler i Bundtet; da disse sidste ingen egentlig Indhyllingskurve kunne have, maa $A_1\ A_3$ indhylles af en fast Cirkel i Bundtet.

Betragtes nu en n-kant $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$, der er indskrevet i en Cirkel α, medens Siderne $A_1\ A_2$, $A_2\ A_3 \ldots A_{n-1}\ A_1$ berøre hver sin Cirkel $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$ i et Bundt, der ogsaa indeholder α, vil efter det ovennævnte $A_1\ A_3$, dernæst $A_1\ A_4 \ldots$ tilsidst ogsaa $A_1\ A_n$ berøre hver sin faste Cirkel i Bundtet. At dette blot er en anden Maade at udtale Poncelets Sætning paa, er indlysende.

Det fortjener at bemærkes, at der er et Tilfælde, hvor Sætningen er umiddelbart indlysende, nemlig det, hvor alle Keglesnittene have indbyrdes Dobbeltrøring i de samme to Punkter. I saa Fald kunne de nemlig ved en lineær Transformation føres over i koncentriske Cirkler. Tillige vil i dette Tilfælde — men ogsaa kun her — Polygonens Vinkelspidser beskrive indbyrdes projektive Punktrækker.

Fra Poncelets Sætning kan man komme til en anden

bekjendt Sætning, der er funden af Steiner. Dette sker ved et rumgeometrisk Overgangsled.

Lad β_1^2 og β_2^2 være to Keglesnitsflader, der antages vindskæve, og lad S T U V være de fire Hjørnespidser i det Tetraeder, der er selvkonjugert med Hensyn til begge Fladerne. Projiceres Fladerne fra S ind paa Planen TUV, ville Omridsene β_1 β_2 blive Keglesnit, der gaa gjennem de fire Punkter, hvori Skjæringskurven r^4 mellem β_1^2 og β_2^2 skjærer Planen, og Fladens Frembringere afbildes som Tangenter til disse Keglesnit. Selve Rumkurven r^4 vil ogsaa afbildes i et Keglesnit α, der gaa gjennem de samme fire Punkter. En 2n-kant, der er indskrevet i α og omskrevet om β_1, kan nu opfattes som Projektion af en lukket 2n-kant i Rummet, der er indskrevet i r^4, medens Siderne ere Frembringere i β_1^2, saaledes at den 1ste, 3die ... (2n—1)te Side ere Frembringere af den ene Art, de øvrige Sider Frembringere af den anden Art paa Fladen. Existerer der én saadan 2n-kant, vil der efter det forrige findes uendelig mange. Men man kan ogsaa i mere Overensstemmelse med Poncelets oprindelige Sætning lade Siderne i Polygonerne være Frembringere i hver sin vindskæve Keglesnitsflade, naar blot alle Flader tilhøre det ved r^4 bestemte Bundt. Projicerer man nu denne nye Figur fra et Punkt O af r^4 ind paa en vilkaarlig Plan, bliver Billedet af Rumkurven en almindelig plan Kurve af tredie Orden, hvori 2n-kanter ere indskrevne, saaledes at disses Sider gaa gjennem hver sit faste Punkt af Kurven; disse faste Punkter ere Sporene af de gjennem O gaaende Frembringere af Fladerne, der skæres af den vindskæve Polygons Sider.

Naar man i en plan Kurve af tredie Orden kan indskrive én lukket Polygon med lige Sideantal, hvis Sider gaa gjennem hver sit faste Punkt af Kurven, kan man indskrive uendelig mange saadanne Polygoner, idet den første Vinkelspids kan vælges i et vilkaarligt Punkt af Kurven.

Steiner, hvem denne Sætning i alt væsentligt skyldes,

underkastede dog Polygonerne den snævrere Betingelse, at alle Siderne af lige Orden skulde gaa gjennem et, alle de øvrige Sider gjennem et andet Punkt af Kurven. Besynderligere er det, at Sætningen, saa vidt jeg véd, overhovedet slet ikke lader til at være bleven udtalt i sin almindelige Form, og det skjøndt den jo i Virkeligheden, som vi have sét, kun er en ny Udtale af Poncelets gamle Sætning. Vil man søge en Grund til denne Forbigaaelse, maa den vel nærmest søges deri, at dens speciellere Form giver Anledning til mange ret interessante Sidesætninger og Tilføjelser; muligvis har ogsaa den Grund medvirket, at den almindeligere Sætning, saavidt jeg sér, ikke ganske let sés ved den antalgeometriske Methode, der er stillet i Spidsen for denne Artikel. Direkte Beviser kunne selvfølgelig ogsaa let gives enten med Benyttelse af den sædvanlige Parameterfremstilling af Punkter paa en plan Trediegradskurve ved elliptiske Funktioner eller ligefrem synthetisk, hvad jeg muligvis ved anden Lejlighed kan komme tilbage til.

Projiceres den ovenfor omtalte Rumfigur fra et vilkaarligt Punkt af Rummet ind paa en vilkaarlig Plan. kommer man, idet Rumkurvens Billede vil blive en plan Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter, let til følgende Sætning:

I den almindelige Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter kan man indskrive uendelig mange 2n-kanter, hvis Sider berøre hver sit Keglesnit henhørende til et særligt System af firdobbelt rørende Keglesnit til Kurven, saafremt man kan indskrive én saadan 2n-kant.

For at Beviserne for de to sidstnævnte Sætninger skulle være fuldstændige, maa det dog særskilt godtgjøres, at enhver Plankurve af de nævnte Arter, kan opfattes som perspektivisk Billede af Skjæringskurven mellem to Keglesnitsflader. Dette er dog ganske let at gjøre; jeg kan f. Ex. henvise til en Afhandling af Prof. Zeuthen i Vidensk. Selsk. Skrifter 1879.

Jeg skal her endnu omtale en anden Sætning af Steiner.

der henhører til samme Art, skjøndt den har en simplere Karakter*) Den udsiger, at man kan konstruere uendelig mange Grupper paa n Cirkler, der alle berøre to givne Cirkler α og β, og af hvilke tilmed enhver berører saavel den følgende som den foregaaende Cirkel i Gruppen, saafremt én saadan Gruppe existerer. Vi ville bevise denne Sætning med en lille Udvidelse. Man kan nemlig tegne n Par Cirkler α_1 β_1, α_2 β_2 . . ., der alle tilhøre samme Bundt, og forlange, at den første Cirkel i Gruppen skal berøre α_1 og β_1 osv., medens tillige hver Cirkel skal berøre dens to Naboer. Lukkes her Rækken én Gang, vil den altid lukkes, hvorledes end den første Cirkel vælges, naar den blot berører α_1 og β_1.

Denne Sætning er nemlig øjensynlig rigtig, naar samtlige Cirkler ere koncentriske; det er dernæst let at bevise, at det almindelige Tilfælde kan reduceres til dette ved Brug af inverse Figurer. Det er først og fremmest klart, at de givne Cirkler ikke maa have noget reelt Punkt fælles, thi i saa Fald maatte man ogsaa kunne begynde med en Cirkel med Radius nul, hvad der øjensynlig er umuligt. Lad nu γ_1 γ_2 . . . være Cirkler, som skære alle de givne under ret Vinkel, hvad der er muligt, da α_1 β_1 . . . danne et Bundt. Centret A_1 for α_1 vil med Hensyn til en vilkaarlig af Cirklerne γ have en Potens, der er Kvadratet paa Radius til α_1; ligesaa vil Centret B_1 til β_1 have en Potens med Hensyn til enhver Cirkel γ, der er lig Kvadratet paa Radius til β_1. Cirklerne γ ville derfor danne et nyt Bundt med A_1 B_1 til Radikalaxe, og man ser let — f. Ex. ved at vælge Centret for en Cirkel γ i Skæringspunktet mellem A_1 B_1 og Radikalaxen for Cirklerne α_1 β_1 — at de alle ville gaa gjennem to reelle Punkter C og D. Tager man nu den inverse Figur for Punktet C som Inversionscentrum og med en vilkaarlig Inversionspotens, ville Cirklerne γ gaa over til rette Linier gjennem det til D svarende Punkt D_1, og Cirklerne α_1 β_1 α_2 β_2 . . . til Cirkler, der skære de nævnte rette

*) De forrige Opgaver staa i Forbindelse med Læren om elliptiske Funktioner af dividerede Argumenter, denne med Cirkeldelingen.

Linier under ret Vinkel d. v. s. til Cirkler, der have Centrum i D_1. Da nu ved Inversion Cirkel gaar over til Cirkel og Berøring ligeledes gaar uforandret over, ses Paastandens Rigtighed.

Foruden de anførte Exempler findes der naturligvis endnu adskillig flere Sætninger af den omhandlede Art. Saaledes kan man i et Keglesnit indskrive uendelig mange Polartrekanter med Hensyn til et andet Keglesnit, saafremt man kan indskrive én saadan. Maaske den allersimpleste er den, at man i et Keglesnit kan indskrive uendelig mange 2n-kanter, hvis Sider gaa gjennem hver sit af 2n Punkter, alle beliggende i samme rette Linie, saafremt der findes én saadan. Dette sés let enten ved det antalgeometriske Princip eller ved at omprojicere Figuren saaledes, at Keglesnittet bliver en Cirkel og Linien samtidig kommer uendelig fjern (se f. Ex. Jul. Petersens Konstruktionsopgaver Nr. 317).

Paa dette Sted vil jeg endnu blot omtale de Forsøg, man har gjort paa Udvidelser af Poncelets Sætning til Rummet. Man faar ikke en saadan ved ligefrem at erstatte Polygonerne med Polyedre indskrevne i én og omskrevne om en anden Keglesnitsflade, thi føjes ingen nærmere Bestemmelser til, bliver den derved dannede Sætning positiv urigtig. En Undersøgelse af, hvilke nærmere Bestemmelser da ere tilstrækkelige for Sætningens Gyldighed, vilde være af Interesse, men der foreligger, saa vidt jeg véd, intet derom; exempelvis kan nævnes, at man faar en rigtig Sætning, naar Fladerne forudsættes at berøre hinanden langs et Keglesnit, men visse andre Tilføjelser kunne vistnok vise sig lige saa gode.

Man har derimod med mere Held betragtet Tetraedre indskrevne i (eller omskrevne om) en Keglesnitsflade, og saaledes beliggende, at to Par modstaaende Kanter ere Frembringere paa en anden Keglesnitsflade. Her findes der ganske vist uendelig mange saadanne Tetraedre, naar der findes ét, men det er ikke ganske rigtigt (som f. Ex. Salmon i geom. of three dim. s. ed. S. 152) at opfatte dette som en Udvidelse

af Poncelets Sætning, thi der findes kun en enkelt Uendelighed af Tetraedre, der tilfredsstille Betingelserne; man ser tilmed ved det oftere benyttede rumgeometriske Overgangsled, at Sætningen i Virkeligheden atter ikke er andet end en ny Udtale af Poncelets gamle Sætning.*)

Mere Udbytte faar man ved ogsaa i Rummet at betragte Polygoner, nemlig indskrevne Polygoner, hvis Vinkelspidser ligge paa én Keglesnitsflade, medens Siderne berøre andre Flader. Her er det meget muligt, at en temmelig direkte Udvidelse maa kunne opstilles. At den dog ikke ligger saa lige for, vil maaske bedst skønnes deraf, at en fuldtud tilfredsstillende Udvidelse, der svarer til det specielle Tilfælde af den plane Sætning, hvor Keglesnittene berøre hinanden i to faste Punkter, først for ikke længe siden er funden af Prof. Zeuthen i en Afhandling i Math. Annalen Bd. 32. I denne findes adskillige nye Sætninger ogsaa af den Art, der her er paa Tale; idet jeg imidlertid vil holde mig til en enkelt for os særlig interessant af disse, kan Beviset for dennes Vedkommende føres en Del simplere og tilmed mere synthetisk end paa det anførte Sted. Zeuthens Sætning lyder

Hvis der findes én lukket Polygon, hvis Vinkelspidser ligge paa hver sin Flade i et Bundt af Keglesnitsflader $(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$, der alle gaa gjennem en vindskæv Firkants Sider og hvis Sider berøre hver sit Par af Flader $\beta_1 \beta_1'$, $\beta_2 \beta_2'$ ... i samme Bundt, saa vil der findes uendelig mange lukkede Polygoner (n-kanter), der tilfredsstille de samme Betingelser, idet nemlig hvert Punkt af en af Fladerne kan vælges som Vinkelspids.

En Løsning medfører efter denne Sætning en dobbelt Uendelighed af Løsninger, saa at vi her have en virkelig Udvidelse. At Sætningen paa den anden Side maa opfattes

*) Yderligere Betragtninger væsentlig af samme Art ere fremsatte af Griffith i Proc. of Lond. math. society. Bd. 14.

som en Udvidelse, der blot svarer til dobbeltrørende Keglesnit i Planen, er væsentlig betinget deraf, at de frie Vinkelspidser her danne indbyrdes projektive Figurer.

Det Bevis, der her skal gives, bygges paa følgende Sætning, der i det væsentlige skyldes v. Staudt:

To vilkaarlige Keglesnitsflader kunne opfattes som svarende til hinanden i to collineare Figurer, saaledes at der til tre Punkter af den ene Flade svarer tre opgivne Punkter af den anden Flade.

Lad der gjennem tre Punkter ABC af den ene Flade φ gaa Frembringerne abc af den ene Art og Frembringerne pqr af den anden Art Frembringere paa Fladen. Paa den anden Flade φ_1 være a_1 b_1 c_1 og p_1 q_1 r_1 de gjennem de tilsvarende Punkter A_1 B_1 C_1 gaaaende Frembringere. Den projektive Transformation af Rummet, der er bestemt ved Punktparrene AA_1, BB_1, CC_1, (aq) (a_1q_1), (bp) (b_1p_1), vil føre Fladen φ paa den forlangte Maade over i φ_1; Transformationen kan udføres paa én Maade endnu, da Rækkerne a_1 b_1 c_1 og p_1 q_1 r_1 ... kunne ombyttes.

Særlig sés det, at man paa to Maader ved en projektiv Transformation kan føre en Keglesnitsflade φ saaledes over i sig selv, at tre Punkter af Fladen svare til tre andre givne Punkter af denne, idet man nemlig kan lade en retliniet Frembringer svare til en Frembringer af samme Art eller til én af modsat Art. De to Transformationer kunne vi med Prof. Zeuthen kalde Transformationen af første Art og af anden Art, men vi ville her holde os til Transformationen af første Art. Ved en saadan vil der findes to (reelle eller imaginære) Frembringere af hver Art, der svare til sig selv, og Vinkelspidserne EFGH af den af disse dannede vindskæve Firkant, ere fire paa selve Fladen liggende Punkter, der svare til sig selv. Kjendes Dobbeltpunkterne EFGH, er Transformationen bestemt ved et vilkaarligt nyt Par tilsvarende Punkter.

Vi have yderligere Brug for følgende Sætning:

Føres ved en Gruppe af projektive Transformationer 4 faste Punkter EFGH over i sig selv, ville de Figurer, der dannes af de tilsvarende Punkter P_1 og Q_1 til to vilkaarlige givne Punkter P og Q, være indbyrdes projektive.

$$\text{Af } \overline{EF}\,(GHPQ) \text{ proj. } \overline{EF}\,(GHP_1Q_1),$$

udledes nemlig

$$\overline{EF}\,(GHPP_1) \text{ proj. } \overline{EF}\,(GHQQ_1),$$

og denne i Forbindelse med de analoge godtgjør Paastandens Rigtighed.

Lader man f. Ex. P_1 beskrive en ret Linie, vil ogsaa Q_1 beskrive en ret Linie, og naar den første af disse gaar gjennem P, vil den sidste aabenbart gaa gjennem Q.

Lad os nu betragte en projektiv Transformation (af første Art), der fører en Flade φ over i sig selv, hvorved Dobbeltpunkterne ere EFGH, medens de til sig selv svarende Linier ere a, b, p, q.

Lad ved denne Transformation, som vi i et Øjeblik kunne kalde T_1, et fast Punkt P' af Fladen gaa over i Punktet P_1'. Paa Linien $P'\,P_1'$ vælge vi et nyt Punkt P_2' og bestemme den Transformation T_2 i Gruppen af alle de Transformationer, der føre Linierne a b p q over i sig selv, der tillige fører P' over i P_2'. Naar nu et bevægeligt Punkt P gjennemløber Fladen φ, vil det ved Transformationen T_1 til P svarende Punkt P_1 ligeledes gjennemløbe φ, medens det til P ved Transformationen T_2 svarende Punkt P_2 vil gjennemløbe en ny Keglesnitsflade φ_2, der gaar gjennem P_2' og tilhører det ved Linierne a b p q bestemte Bundt. Af Hjælpesætningen følger, at de af P_1 og P_2 beskrevne Figurer ere indbyrdes projektive, og tillige at samtidige Punkter P, P_1 og P_2 ligge ud i ret Linie. Vælges yderligere paa Linien $P'\ P_1'$ et Punkt P_3', vil den Transformation T_3 i vor Gruppe, der er bestemt ved $P_2'\ P_3'$ som et Par tilsvarende Punkter, føre et vilkaarligt Punkt P_2 af φ_2 over i et Punkt P_3 af en bestemt ny Flade φ_3, der tilhører det oven-

nævnte Bundt, saaledes at P_2 og P_3 beskrive projektive Figurer hver paa sin Flade, medens $P P_1 P_2 P_3$ stadig ligge ud i ret Linie.

Hermed er altsaa bevist:

Forbindelseslinierne mellem tilsvarende Punkter i to projektive Figurer af første Art paa en Keglesnitsflade φ ville ved deres Skæring med to vilkaarlig valgte Keglesnitsflader φ_2 og φ_3, der gaa gjennem de til sig selv svarende Frembringere abpq paa φ, bestemme to projektive Figurer paa disse Flader.

Det ses omvendt, at de Linier $P_2 P_3$, der paa φ_2 og φ_3 bestemme projektive Figurer (P_2) og (P_3), ville skære en vilkaarlig Flade i de givnes Bundt i projektive Figurer, saafremt φ_2 og φ_3 have to Frembringere af hver Art fælles, og disse Frembringere svare til sig selv. I Bundtet $\varphi_2 \varphi_3$ findes der nu to Flader β og β', der berøre en vilkaarlig valgt Linie $P_2 P_3$. Alle Linierne $P_2 P_3$ maa da berøre disse to Flader, thi hvis en anden af Linierne end den førstnævnte skar f. Ex. β i to adskilte Punkter, fandtes der paa β to projektive Figurer, der havde 5 Par sammenfaldende tilsvarende Punkter uden at være identiske.

Kongruensen af de omtalte Forbindelseslinier er af anden Orden, da der gjennem hvert Punkt P af Fladen φ gaar to Linier af den, nemlig Forbindelseslinien mellem P og hvert af de to Punkter, der svare til P, eftersom dette henregnes til den ene eller den anden af de to projektive Figurer paa Fladen.

Men væsentlig er det, at den Kongruens af fjerde Orden, der dannes af Fællestangenterne til to Keglesnitsflader, der skære hinanden i en vindskæv Firkants Sider, maa være sammensat af to af de ovennævnte Kongruenser af anden Orden; for at indse dette behøver man kun at betragte Skæringspunkterne mellem Komplexets Linier og en vilkaarlig fast Flade lagt gjennem den vindskæve Firkants Sider.

Nu kan Zeuthens Sætning let bevises. Vi have n Flader

$\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$ og n Par af Flader $\beta_1\ \beta_1'$, $\beta_2\ \beta_2' \ldots \beta_n\ \beta_n'$, hvilke alle gaa gjennem en vindskæv Firkants Sider. Drages fra et Punkt P_1 af φ_1 en Fællestangent til β_1 og β_1', der skjærer φ_2 i P_2, fra dette Punkt en Fællestangent til β_2 og β'_2, der skjærer φ_3 i P_3 o. s. v. tilsidst fra P_n en Fællestangent til β_n og β_n', der skjærer φ_2 i P_{n+1}, ville Punkterne P_1 og P_{n+1} paa φ_1 beskrive projektive Figurer, for hvilke den vindskæve Firkants Vinkelspidser ere Dobbeltpunkter. Naar nu P_{n+1} én Gang falder sammen med P_1 udenfor Dobbeltpunkterne, bliver Transformationen $P_1\ P_n$ identisk, og man kan konstruere en lukket n kant af den beskrevne Beskaffenhed med et vilkaarligt Punkt af φ_1 som Vinkelspids.

Betragtes projektive Figurer af anden Art paa en Keglesnitsflade, faas en analog Sætning, der om man vil kan bevises paa lignende Maade som ovenfor.

Integration af exakte Differentialkvotienter af Formen $\varphi(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^ny}{dx_n})$.

Af P. T. Foldberg.

Et Udtryk af Formen

$$V = \varphi(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n})$$

kan være exakt Differentialkvotient af et Udtryk

$$U = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$$

uafhængigt af y's Funktionsform. I saa Fald skal

$$\frac{dU}{dx} = V \text{ el. } U = \int V\, dx.$$

Sættes $y = u + \alpha v$, hvor u og v ere Funktioner af x, α en af x uafhængig Variabel, og betegnes $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots, \frac{du}{dx} \ldots$

henholdsvis $y_I, y_{II}, \ldots, u_I \ldots$, faas

$$V = \varphi\,(x, u + \alpha v, u_I + \alpha v_I, u_{II} + \alpha v_{II}, \ldots)$$

altsaa*)

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} v + \frac{\partial\varphi}{\partial y_I} v_I + \frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}} v_{II} + \ldots$$

og
$$V = \int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} v + \frac{\partial\varphi}{dy_I} v_I + \frac{\partial\varphi}{dy_{II}} v_{II} + \ldots\right) d\alpha$$
$$+ \varphi\,(x, u, u_I, u_{II} \ldots),$$

idet da den disponible Størrelse α er sat lig 1, altsaa $y = u + v$.

Heraf faas atter

$$U = \int_0^1 d\alpha \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} v + \frac{\partial\varphi}{\partial y_I} v_I + \frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}} v_{II} + \ldots\right) dx$$
$$+ \int \varphi\,(x, u, u_I, u_{II} \ldots)\,dx,$$

idet i Dobbeltintegralet Integrationernes Rækkefølge er byttet om.

Nu giver delvis Integration

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial y_I} v_I\,dx = v.\,\frac{d\varphi}{dy_I} - \int v\,\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_I}\right) dx$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}} v_{II}\,dx = v_I\,\frac{\partial\varphi}{dy_{II}} - v\,\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}}\right)$$
$$+ \int v\,\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}}\right) dx$$

. . . .

altsaa

$$U = \int \varphi\,(x, u_I, u_{II} \ldots)\,dx$$
$$+ v\int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_I} - \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{III}}\right)\ldots\right) d\alpha$$
$$+ v_I\int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{II}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_{III}}\right) + \ldots\right) d\alpha$$

. . . .

---

*) $\frac{d}{dx}$ betegner total, $\frac{\partial}{\partial x}$ partiel Differentiation.

$$+\int_0^1 d\alpha \int v \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_I}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\cdot\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_{II}}\right) - \dots\right) dx.$$

Da den vilkaarlige Funktion y er sat lig $u + v$, kan man vælge u, som man selv vil, d. v. s. sætte u lig en eller anden bekvem Funktion af x, dog naturligvis med den Indskrænkning, at den ikke gjør nogen af Størrelserne uendelig eller ubestemt. Den første Integration kan da udføres, og ligeledes kunne de følgende Integrationer med Hensyn til α, hvor det maa erindres, at man i Størrelserne under Integraltegnet skal sætte $y = u + \alpha v$, $y_I = u_I + \alpha v_I \dots$, udføres uafhængigt af y's Form. Tilbage staar den sidste Integration; denne kan udføres, altsaa U bestemmes, naar

$$v\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_I}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y_{II}}\right) - \dots\right)$$

er en Funktion af x alene (explicit) eller o. Det kan imidlertid vises, at denne Størrelse maa være o. Todhunter, der i sin Integral Calculus har ovenstaaende Udvikling, viser dette ved Variationsregningens Hjælp (allerede gjort af Euler); men jeg vil benytte en original Udvikling, der, som det vil ses, ogsaa giver et simpelt Middel til Opgavens Løsning ɔ: Integralets Beregning.

Af $$U = f(x, y, y_I, y_{II}, \dots y_{n-1})$$

faas $$\frac{dU}{dx} = \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta U}{\delta y} y_I + \frac{\delta U}{\delta y_I} y_{II} + \dots + \frac{\delta U}{\delta y_{n-1}} y_n \quad (1).$$

Endvidere er

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta U}{\delta y_r}\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta U}{\delta y_r}\right) + y_I \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta y_r}\right) + \dots$$

$$+ y_r \frac{\delta}{\delta y_{r-1}}\left(\frac{\delta U}{\delta y_r}\right)$$

$$+ y_{r+1} \frac{\delta}{\delta y_r}\left(\frac{\delta U}{\delta y_r}\right) + \dots$$

$$= \frac{\delta}{\delta y_r}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y_r}\left(y_I \frac{\delta U}{\delta y}\right) + \dots + \frac{\delta}{\delta y_r}\left(y_r \frac{\delta U}{\delta y_{r-1}}\right)$$

$$+ \frac{\delta}{dy_r}\left(y_{r+1} \frac{\delta U}{\delta y_r}\right) + \dots = \frac{\delta U}{\delta y_{r-1}},$$

altsaa if. (1)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y_r}\right) = \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{dU}{dx}\right) - \frac{\partial U}{\partial y_{r-1}}$$

eller

$$\frac{\partial U}{\partial y_{r-1}} = \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{dU}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y_r}\right) \qquad (2)$$

Af (1) ses, at en nødvendig Betingelse for, at V er exakt Differentialkvotient af U, er at V er lineær med Hensyn til y_n, altsaa

$$V = M + Ny_n,$$

hvor M og N ere Funktioner af x, y, $y_I \ldots y_{n-1}$ og

$$\frac{\partial U}{\partial y_{n-1}} = N, \qquad (3)$$

hvoraf ved successiv Benyttelse af (2), idet $\frac{dU}{dx} = V$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_{n-2}} &= \frac{\partial V}{\partial y_{n-1}} - \frac{dN}{dx} \\ \frac{\partial U}{\partial y_{n-3}} &= \frac{\partial V}{\partial y_{n-2}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y_{n-1}}\right) + \frac{d^2 N}{dx^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y_I} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y_{II}}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_{III}}\right) \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1} N}{dx^{n-1}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

og endelig, idet man let ser, at $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y}$,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y_I}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_{II}}\right) + \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial V}{\partial y_{III}}\right) - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^n N}{dx^n}. \qquad (5)$$

Det ses altsaa, at (5) er en nødvendig, og if. den tidligere Udvikling, ogsaa en tilstrækkelig Betingelse for, at

$$V = M + Ny_n$$

er en exakt Differentialkvotient. Endvidere ses det, at Integralfunktionen U kan bestemmes paa almindelig Maade ved sine partielle Differentialkvotienter, der ere bekjendte af (3), (4) og

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M - \frac{\partial U}{\partial y} y_I - \frac{\partial U}{\partial y_I} y_{II} - \dots - \frac{\partial U}{\partial y_{n-2}} y_{n-1}.$$

Et Exempel vil vise, hvorledes Regningen simpelt udføres.

$$V = y^2 + (2xy-1)\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{d^3y}{dx^3}.$$

(Boole Differential Equations, Ch. X, Ex. 28.)

$N = x^2$	$\frac{\partial V}{\partial y_{II}} = x$	$\frac{\partial V}{\partial y_I} = 2xy-1$	$\frac{\partial V}{\partial y} = 2y + 2xy_I$
	$-\ 2x$	$-\ (-1)$	$-(2y+2xy_I)$
$\frac{\partial U}{\partial y_{II}} = x^2$	$\frac{\partial U}{\partial y_I} = -\ x$	$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$	0

$$U = \int_0^{y_{II}} x^2\, dy_{II} - \int_0^{y_I} x\, dy_I + \int_0^{y} 2xy\, dy + \int 0\,.\,dx,$$

idet man, paa Grund af den i de tre første Integraler valgte (her tilladelige) lavere Grænse 0, i Udtrykket for $\frac{\partial U}{\partial x}$ skal indsætte $y_{II} = 0$, $y_I = 0$, $y = 0$.

Man faar da

$$U = x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + xy^2 + c.$$

Danske Examensopgaver.

Polyteknisk Examen for Ingeniører

Jan. 1890.

I. 1) Man skal finde de Værdier af x, y, z, som gjøre Funktionen

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

til et M[illegible] et Minimum, idet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2) Differentialligningen

$$(\cos x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\sin x + \sin^2 x)\frac{dy}{dx}$$
$$+ (\cos^2 x - \sin x - \cos x)\, y = 0$$

har det partikulære Integral $y = e^x$. Find det fuldstændige Integral.

Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$(\cos x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\sin x + \sin^2 x)\frac{dy}{dx}$$
$$+ (\cos^2 x - \sin x - \cos x)\, y = e^x (\cos x - 1)^3.$$

Opløsning. 1) u er kun Funktion af to uafhængige Variable. Ved Hjælp af Ligningerne

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

findes

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

For disse Værdier af x, y, z findes

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{a^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{b^2},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{9}{a^2 b^2}.$$

Øverste Tegn giver da Maximum, nederste Minimum.

2) I begge Differentialligningerne kan det fuldstændige Integral antages at have Formen

$$y = Ce^x,$$

hvor C er Funktion af x.

For den homogene Ligning faar man til Bestemmelse af C

$$(\cos x - 1)\frac{d^2C}{dx^2} + (2(\cos x - 1) + \sin x + \sin^2 x)\frac{dC}{dx} = 0.$$

Heraf findes:

$$\frac{dC}{dx} = A(1 - \cos x)\, e^{-x + \sin x},\quad C = -Ae^{-x + \sin x} + B,$$

$$y = -Ae^{\sin x} + Be^{x}.$$

For den ikke homogene Lignings Vedkommende faas til Bestemmelse af C:

$$\frac{d^2C}{dx^2} + \left(1 - \cos x + \frac{\sin x}{\cos x - 1}\right)\frac{dC}{dx} = (\cos x - 1)^2.$$

Heraf findes:

$$\frac{dC}{dx} = -\cos x + 1 + C' e^{-x + \sin x}(\cos x - 1),$$

$$C = x - \sin x + C' e^{-x + \sin x} + C''$$

$$y = (x - \sin x)\, e^{x} + C' e^{\sin x} + C'' e^{x}.$$

II. Fra de retvinklede Koordinaters Begyndelsespunkt fældes vinkelrette Linier ned paa alle Tangentplaner til Fladen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}. \qquad (1)$$

Man skal finde det geometriske Sted for de Vinkelrettes Skæringspunkter med Tangentplanerne (Fodpunktfladen).

I det specielle Tilfælde, hvor $a = b = 7$, $c = -21$ søges det Volumen, som ligger mellem Fodpunktfladen, Planet

$$z = \frac{7}{6}$$

og Cylindren

$$x^2 + y^2 = 6.$$

(Tilnærmet Beregning ved Logarithmer af det for Voluminet fundne irrationale Udtryk forlanges ikke).

Naar c i (1) er en variabel Størrelse, hvorved (1) fremstiller et System af Flader, skal man finde et System af Kurver, som hver især skære samtlige Flader (1) under ret Vinkel.

Opløsning. Fodpunktfladens Ligning er

$$z^3 = -(x^2 + y^2)\, z - \frac{a^2}{2c}\, x^2 - \frac{b^2}{2c}\, y^2.$$

I det specielle Exempel bliver denne Ligning til:

$$z^3 = -\left(z - \frac{7}{6}\right)(x^2 + y^2),$$

eller

$$r^2 = \frac{z^3}{\frac{7}{6} - z}$$

Fladen er en Omdrejningsflade om z-Axen med en Kissoide til Meridiankurve og $z = \frac{7}{6}$ til Asymptoteplan. Til Volumenelement tages

$$dV = 2\pi r\, d r \,.\, (\tfrac{7}{6} - z) = \pi \,.\, \frac{2 z^3 - \frac{7}{2} z^2}{z - \frac{7}{6}}\, dz.$$

Grænserne for r ere 0 og $\sqrt{6}$, for z 0 og 1.

$$V = \pi \int_0^1 \frac{2 z^3 - \frac{7}{2} z^2}{z - \frac{7}{6}}\, dz = \pi \left(-\frac{23}{18} + \frac{343}{216}\, l \,.\, 7\right).$$

Til Kurvernes Bestemmelse haves:

$$\frac{dx}{\left(\frac{x}{a^2}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{y}{b^2}\right)} = \frac{dz}{-\frac{1}{c}},\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

$$a^2 \,.\, \frac{dx}{x} = b^2 \,.\, \frac{dy}{y},\quad x\,dx + y\,dy + 2\,z\,dz = 0, \text{ altsaa}$$

$$y^{b^2} = A\, x^{a^2},\quad x^2 + y^2 + 2\, z^2 = B,$$

hvilke ere Ligningerne for en vilkaarlig af de søgte Kurver.

III. Et materielt System bestaar af n materielle Partikler med givne Masser i samme Plan, xy-Planen (retvinklede Koordinater). Partiklerne ere i fast Forbindelse med hverandre; Systemet kan frit bevæge sig i sin egen Plan. Systemets Partikler tiltrækkes til Begyndelsespunktet med Kræfter, som ere proportionale med Masserne og med Afstanden. (For Enhed af Masse og Enhed af Afstand er Kraften α^2). Ved Bevægelsens Begyndelse befinder Tyngdepunktet sig i Abscisseaxen i Afstanden a fra Begyndelsespunktet og faar meddelt Hastigheden v_0 vinkelret paa Abscisseaxen. Samtidig meddeler man hele Systemet Vinkelhastigheden k om Tyngdepunktet. Find Tyngdepunktets Bevægelse og Systemets Rotation om Tyngdepunktet.

Opløsning. Naar man anvender Principet for Tyngdetets Bevægelse, faar man, naar Tyngdepunktets Koordiere ξ og η:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha^2 \xi = o, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha^2 \eta = o.$$

$$\xi = a \cos \alpha t, \quad \eta = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

(Se Jul. Petersens Dynamik § 22). Rotationen om Tyngdepunktet maa foregaa med uforandret Vinkelhastighed k; thi de virkende Kræfter kunne hvert Øjeblik sammensættes til en enkelt Resultant gjennem Tyngdepunktet (J. P.s Statik Opg. 124).

Opgavens sidste Del kan ogsaa løses ved at henføre Systemet til et bevægeligt Koordinatsystem (x′, y′), hvis Begyndelsespunkt er i Tyngdepunktet, og hvis Axer ere parallele med de givne. Formlen

$$\Sigma\, m \left(x' \frac{d^2y'}{dt^2} - y' \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = \Sigma\, (x' Y' - y' X')$$

bliver her til:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \Sigma\, m\, r^2 = \div\, \Sigma\, (m\, \alpha^2\, x'(y' + \eta) - m\, \alpha^2\, y'\, (\xi + x'))$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = o, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \text{konstant} = k.$$

Opgaver til Løsning.

1. Ere a, b, c ... m Rødder i f (x) = o, a′, b′, c′ ... m′ Rødder i f′ (x) = o, og betegnes ved de samme Bogstaver de paa sædvanlig Maade tilsvarende Punkter i Planen, saa er der Ligevægt i Punkterne a′, b′, c′ ... m′, naar man i a, b, c ... m tænker sig lige store tiltrækkende Masser, og disse tiltrække omvendt proportional med Afstanden.

(Efter en Note af Gauss i Gesam. W., Bd. 3, S. 112.)

2. Hvorledes kan man lægge 15 Cirkler (eller rette Linier) saaledes i en Plan, at de faa 30 enkelte Skæringspunkter, 20 Trecirkelskæringspunkter og 12 Femcirkelskæringspunkter, alle reelle, samt at der gaar 5 af Cirklerne eller de rette Linier gjennem hver virkelig Cirkels Centrum.

(Tidsskr. f. Math. Nr. 387.)
(T. N. Thiele.)

3. At bestemme den Funktion u af n Variable x_1, x_2, ... x_n, for hvilken

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = 0, \ \frac{d^2u}{dx_2^2} = 0, \ldots \frac{d^2u}{dx_n^2} = 0.$$

(P. T. F.)

4. Hvorledes integreres Differentialligningen

$$2\left(y\frac{dy}{dx} - x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0?$$

(P. T F.)

5. Bestem de Flader, for hvilke de vandrette Billeder af Faldlinierne danne et System af ligedannede og ensstillede eller parallelforskudte Kurver.

(C. J.)

6. Hvorledes kan man ved Sammenknytning af 3 Inversorer (altsaa i hvert Fald ved 12 Stænger) tvinge 2 Punkter af et leddet System til at beskrive Figurer, der ligge symmetrisk med Hensyn til en given ret Linie.

(C. J.)

7. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet af paa hinanden vinkelrette Tangenter til en Cardoide. (Denne er Fodpunktskurve til en Cirkel, idet Polen ligger paa Periferien).

(Tidssk. f. Math. 1883 Nr. 506.)
(C. J.)

8. Bestem explicite den almindeligste lineære Transformation, der omdanner Ligningen $x^n - a = 0$, hvor a er et komplex Tal, til en anden Ligning af nte Grad med reelle Koefficienter.

(C. J.)

Et Stykke Arvegods fra Professor Oppermann.

(Af T. N. Thiele.)

Som alle de ældre i vor lille mathematiske Kreds vide, har afdøde Ludvig Oppermann, Universitetets Professor i Tydsk, havt en ganske ejendommelig Betydning for vort Fags Udvikling hos os. Han havde en stor Erfaring i den praktisk regnende Mathematik, og forbandt dermed en udpræget Smag for det gode gamle. De ældre engelske Mathematikere af den med Newton kulminerende Skole kjendte han som ingen anden, og fra denne kun altfor lidt paaagtede Guldgrube har han bragt Tidsskrift for Mathematik og den mathematiske Forening en Række Meddelelser, som vi for vor egen Skyld bør behandle med største Pietet. Desværre skrev han selv kun lidt og kort, vi hans Tilhørere maa nu se at hjælpe derpaa saa godt, vi kan. Jeg tror ikke, at nogen af os skylder ham mere end jeg, lad mig derfor nu bringe Tidsskriftet i dets nye Form et lille Afdrag paa denne Gjæld.

Det angaar Uddragning af en hvilkensomhelst Rod under Form af rational Brøk. Jeg beklager, at jeg ikke nu efter 15 Aars Forløb kan huske, hverken den Kilde, hvorfra O. havde hentet Ideen, eller Enkelthederne i den noget ejendommelige Form, hvori han den 11. December 1874 gjorde mathematisk Forening sin Meddelelse. Men Hovedsagen var dog den rationelle, simple og yderst konvergente Regneregel, og af den har jeg mere end en Gang havt god Nytte, den skal jeg gjengive, saaledes som jeg har tilegnet mig den.

Af Hensyn til de bekjendte Hovedsætninger om Roduddragning maa det aabenbart være fordelagtigere at udtrykke Resultatet i Skikkelse af en Række af Faktorer end efter Addender eller paa hvilke som helst andre Maader.

Faktorerne i Produktudviklingen skulle og ville, hvis den valgte Form for de enkelte Faktorer overhovedet er brugbar efterhaanden nærme sig stærkt til 1. For at kunne drage Fordel af de velbekjendte Sætninger om smaa Tal bør man

da skrive hver Faktor i en Form, som nærmer sig til 1, naar et indgaaende Tal er meget lille; som saadan Form vilde Potenser med smaa Exponenter sikkert være allerheldigst overfor Roduddragning, naar man ikke forlangte Resultatet angivet i rational Brøks Form, og naar ikke Logarithmetavlernes begrændsede Nøjagtighed i visse Tilfælde gjorde dette Middel uanvendeligt. Derefter vilde det ligge nærmest at tænke sig Faktorerne i Formerne $1 + n$ eller $1 - n$, hvor n var meget lille, og dette Middel kan ogsaa være ret godt; men baade Hensynet til at kunne behandle Rødder med negative Rodexponenter paa samme Maade som Rødder med positive Rodexponenter og som vi skulle se ogsaa andre Grunde gjøre Valget af Brøksformen

$$\frac{a + \alpha}{a - \alpha}$$

betydelig heldigere, a og α kunne her tænkes som hele Tal, Tilnærmelsen til 1 kræver kun, at α skal være lille i Sammenligning med a.

Man bør nu med Hensyn til denne Form erindre, at naar

$$\frac{p}{q} = \frac{a + \alpha}{a - \alpha}, \text{ er } \frac{p - q}{p + q} = \frac{\alpha}{a},$$

og endvidere, at

$$\log_{nat} \frac{a + \alpha}{a - b} = 2\left\{\frac{\alpha}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Skrive vi da baade det Tal, hvis nte Rod skal uddrages, og Resultatet i den valgte Form, skal altsaa

$$\sqrt[n]{\frac{b + \beta}{b - \beta}} = \frac{a + \alpha}{a - \alpha} \qquad (1);$$

og tage vi her Logarithmerne til begge Ligningens Sider, idet vi bortkaste tredie og højere Potenser af $\frac{\beta}{b}$ og $\frac{\alpha}{a}$, saa faa vi som Tilnærmelsesformel

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{nb} \qquad (2).$$

Naar denne Bortkastelse kan tillades, altsaa hvis nte Rod skal uddrages af et Tal, der ikke er altfor forskjelli- f-

giver denne Tilnærmelsesformel os en første Faktor i Udviklingen

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{nb+\beta}{nb-\beta}\cdots$$

Forudsættes nu, at ogsaa de øvrige Faktorer og dermed ogsaa Restproduktet skal have denne samme specielle Brøkform, kan Restproduktet bestemmes ved Løsning af Ligningen

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{nb+\beta}{nb-\beta}\cdot\frac{1+x}{1-x} \qquad (3)$$

med Hensyn til x; altsaa er

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}\,\frac{(nb-\beta)^n}{(nb+\beta)^n}} = \sqrt[n]{\frac{b_1+\beta_1}{b_1+\beta_1}} = \frac{1+x}{1-x},$$

hvor Forholdet $\beta_1 : b_1$ beregnes efter den nøjagtige Formel

$$\frac{\beta_1}{b_1} = \frac{(b+\beta)(nb-\beta)^n - (b-\beta)(nb+\beta)^n}{(b+\beta)(nb-\beta)^n + (b-\beta)(nb+\beta)^n},$$

der forøvrigt ved Anvendelse af Binominalformlen tilnærmelsesvis vilde give

$$\frac{\beta_1}{b_1} = \frac{n^2-1}{3n^2}\left(\frac{\beta}{b}\right)^3, \qquad (4),$$

idet kun Led af 5te og højere Ordner med Hensyn til $\frac{\beta}{b}$ bortkastes. Med tilsvarende Tilnærmelse vilde man ved Anvendelse af (2) finde

$$x = \frac{n^2-1}{3n^3}\left(\frac{\beta}{b}\right)^3 \qquad (5),$$

som, da Rodexponenten n altid kan forudsættes at være større end 1, viser at β blot behøver at være lidt mindre end b, for at første Led i (3) allerede skal give en virkelig Tilnærmelse, og at Tilnærmelsen bliver meget betydelig, hvis β er mange Gange mindre end b.

Vil man ikke nøjes med en saadan første Tilnærmelse, maa man som sagt beregne $\frac{\beta_1}{b_1}$ efter den strenge Formel, og det kan man jo, naar man blot kan udregne nte Potenser af hele Tal. Saasnart dette er sket, giver ny Anvendelse af (3)

$$\sqrt[n]{\frac{(b+\beta)}{(b-\beta)}\frac{(n\,b-\beta)^n}{(n\,b+\beta)^n}} = \sqrt[n]{\frac{b_1+\beta_1}{b_1-\beta_1}} = \frac{n\,b_1+\beta_1}{n\,b_1-\beta_1}\cdot\frac{1+x_1}{1-x_1},$$

eller

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}} = \frac{n\,b+\beta}{n\,b-\beta}\cdot\frac{n\,b_1+\beta_1}{n\,b_1-\beta_1}\cdot\frac{1+x_1}{1-x_1},$$

hvor x_1 bestemmes ved $\beta_1 : b_1$ paa samme Maade som x ved $\beta : b$, altsaa tilnærmelsesvis

$$x_1 = \frac{n^2-1}{3n^3}\left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^3 = \frac{(n^2-1)^4}{81\,n^9}\left(\frac{\beta}{b}\right)^9.$$

Men paa samme Maade som her Faktorrækkens andet Led er dannet, kan man fortsætte, og bestandig beregne hvert følgende Led af det foregaaende efter den almindelige Lov

$$\frac{\beta_{r+1}}{b_{r+1}} = \frac{(b_r+\beta_r)(n\,b_r-\beta_r)^n-(b_r-\beta_r)(n\,b_r+\beta_r)^n}{(b_r+\beta_r)(n\,b_r-\beta_r)^n+(b_r-\beta_r)(n\,b_r+\beta_r)^n}.$$

eller

$$\frac{b_{r+1}+\beta_{r+1}}{b_{r+1}-\beta_{r+1}} = \frac{b_r+\beta_r}{b_r-\beta_r}\cdot\left(\frac{n\,b_r-\beta_r}{n\,b_r+\beta_r}\right)^n \qquad (6),$$

og derved vil Produktet

$$\frac{n\,b+\beta}{n\,b-\beta}\cdot\frac{n\,b_1+\beta_1}{n\,b_1-\beta_1}\cdot\frac{n\,b_2+\beta_2}{n\,b_2-\beta_2}\cdots\cdots\frac{n\,b_r+\beta_r}{n\,b_r-\beta_r}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}\cdot\frac{b_{r+1}-\beta_{r+1}}{b_{r+1}+\beta_{r+1}}}$$

nærme sig til

$$\sqrt[n]{\frac{b+\beta}{b-\beta}}$$

med en Hastighed, der svarer til den, hvormed en Række

$$z + z^3 + z^9 + z^{27} + z^{81} + \ldots + z^{(3^n)} + \ldots$$

konvergerer, idet

$$z = \frac{\beta}{b}\sqrt{\frac{n^2-1}{3n^2}};$$

og selv i de ugunstigste Tilfælde, hvor der søges en meget høj Rod af et meget stort Tal, ($n^2 = \infty$, $\beta = b$), vil z være en ægte Brøk mindre end $\sqrt{\frac{1}{3}}$, altsaa vil [illegible] 3^{40} er et

tyveciffret Tal, senest med 5te Tilnærmelse komme ud over enhver praktisk Grændse for Nøjagtigheden.

Man vil dog altid kunne spare sig idetmindste en af disse Tilnærmelser, thi blot ved at tælle Ciffrene under Rodtegnet, og end mere ved Hjælp af smaa Tavler over enkeltciffrede Tals nte Potenser vil man altid kunne finde en første Faktor til Udviklingen, hvis nte Potens indbragt under Rodtegnet vil gjøre β virkeligt lille i Forhold til b. Men hvor lidt nøjeregnende man behøver at være med første Tilnærmelse, ses maaske bedst, naar vi som første Exempel paa Methodens Anvendelse behandle den Opgave at finde $\sqrt{9}$, som om vi hverken kjendte Resultatet eller vidste nogen bedre Tilnærmelse end Enheden selv. Fejlen er da nogenlunde saa grov, som den kan være, naar man blot tager Hensyn til Decimalernes Antal i det opgivne Tal. Vi sætte altsaa $b = 5$, $\beta = 4$, d. e.

$$\sqrt{9} = 1 \, . \sqrt{\frac{5+4}{5-4}}$$

og have da ifølge (3) som første Tilnærmelse

$$\sqrt{9} = \frac{2 \, . \, 5 + 4}{2 \, . \, 5 - 4} \ldots = \frac{7}{3} \ldots,$$

dermed bliver $\beta_1 : b_1 = 16 : 65$, og vi finde anden Tilnærmelse ved

$$\sqrt{9} = \frac{7}{3} \sqrt{\frac{65+16}{65-16}} = \frac{7}{3} \, . \, \frac{73}{57} \ldots = \frac{511}{171},$$

hvor allerede to Ciffre ere rigtige; med $\beta_2 : b_2 = 1024 : 262145$ finde vi tredie Tilnærmelse

$$\sqrt{9} = \frac{511}{171} \sqrt{\frac{263169}{261121}} = \frac{7}{3} \, . \, \frac{73}{57} \, . \, \frac{262657}{261633} \ldots = \frac{134217727}{44739243},$$

med mere end 7-ciffret Nøjagtighed.

Som Exempel paa særlig hurtig Konvergens kan $\sqrt[3]{91}$ tjene; satte vi efter en Kubiktalstavle $\frac{9}{2}$ som første Faktor, findes

$$\sqrt[3]{91} = \frac{9}{2} \sqrt[3]{\frac{728}{\text{[illegible]}}} = \frac{9}{2} \, . \sqrt[3]{\frac{1457-1}{1457+1}} = \frac{9}{2} \, . \, \frac{3 \, . \, 1457 - 1}{3 \, . \, 1457 + 1} = \frac{19665}{4372},$$

nemlig β [illegible] 1457, her giver allerede anden Tilnærmelse

$$\sqrt[3]{91} = \frac{19655}{4372} \cdot \sqrt[3]{\frac{7604695903168}{7604695904625}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2185}{2186} \cdot \frac{2281408771 0961}{228140877 12418} \cdots$$

mere end 30 nøjagtige Ciffre.

Hvor stærk den Oppermannske Methodes Tilnærmelse end er, kan der dog være Tale om en Mulighed for ad andre Veje at komme endnu hurtigere og simplere til Maalet, i Form af rationale Brøker. Thi vel er den sædvanlige Udvikling i Kjædebrøk langt omstændeligere end denne Oppermannske Methode, men om Kjædebrøkerne vide vi, at de netop give Tilnærmelserne udtrykte ved Brøker med de mindst mulige Tællere og Nævnere, og Idealet for en Tilnærmelsesmethode maatte være en saadan, som med store og voxende Spring gik frem i Kjædebrøkskonvergenternes Række; og dette gjør den Oppermannske Tllnærmelse vel i sine gunstige Tilfælde men ingenlunde altid. Der er intet stødende i at Methoden ikke opfylder denne strenge Fordring i de Tilfælde, hvor den første vilkaarligt valgte Faktor ikke er nogen Kjædebrøkskonvergent; men det maa anses som en ganske lille Mangel, at selv hvor første Oppermannske Tilnærmelse er en Kjædebrøkskonvergent, blive de paafølgende Faktorer i Almindelighed ikke saadanne. Saaledes er $\frac{5}{2}$ den tredie Kjædebrøkskonvergent til $\sqrt{7}$, men de paafølgende Oppermannske Tilnærmelsesværdier, $\frac{545}{206}$ og $\frac{647558645}{244754162}$ have vel henholdsvis 8 og 23 Kjædebrøks-Konvergenter tilfælles med $\sqrt{7}$, men høre ikke selv til Rækken af de egentlige Konvergenter.

Ved Kvadratsroduddragning gives der dog nogle interessante Tilfælde, hvor alle de Oppermannske Tilnærmelsesbrøker ere Konvergenter. Navnlig gjælder dette, naar den første O.'ske Tilnærmelse $\frac{p}{p}$ til $\sqrt{t}$ er en saadan særligt fremragende Kjædebrøkskonvergent, at $p^2 = q^2 t \pm 1$. I dette Tilfælde ville alle paafølgende O.'ske Tilnærmelser ikke blot være Konv[illegible] men ligesaa privilegerede Konvergenter. For $\sqrt{7}$ fr

ledes fra $\frac{8}{3}$ hvor $8^2 = 7 \cdot 3^2 + 1$, til $\frac{2024}{765}$, hvor $(2024)^2 = 4096576$ og $7 \cdot (765)^2 = 4096575$ o. s. v. Sætte vi almindeligere $p^2 = tq^2 - r$, og lade vi en O.'sk Udvikling for $\sqrt{t}$ begynde med Faktoren $\frac{p}{q}$, vil

$$\sqrt{t} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{q^2t}{q^2t - r}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{4q^2t - r}{4q^2t - 3r} \cdot\cdot = \frac{p_1}{q_1} \cdot\cdot$$

idet $\beta : b = r : 2q^2t - r$, men

$$p_1^2 = p^2(4q^2t - r)^2 = 16q^6t^3 - 24q^4rt^2 + 9q^2r^2t - r^3$$

og $q_1^2t = q^2t(4q^2t - 3r)^2 = 16q^6t^3 - 24q^4rt^2 + 9q^2r^2t$

altsaa bliver $p_1^2 = tq_1^2 - r^3$.

Hvis man altsaa til $\sqrt{t}$ har $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... som de Oppermannske Tilnærmelser, og man prøver dem ved Kvadrering og Nævnerens Multiplikation med t, og derved finder at den førstes Afvigelse er r, vil den andens være r^3, den tredies r^9, den fjerdes r^{27} . . ., forsaavidt ikke $\frac{p_1}{q_1}$ har kunnet forkortes. Medens de tilsvarende Afvigelser i Kvadratrodens periodiske Kjædebrøks-Konvergenter ikke voxe men gjentage sig periodisk, kunne altsaa de Oppermannske Tilnærmelsesbrøkers Afvigelser absolut set voxe op til store Tal. Det er dog ikke blot, naar $r = \pm 1$, at Afvigelserne holde sig smaa, ogsaa naar $r = \pm 2$ eller $r = \pm 4$, ville Tilnærmelsesbrøkerne $\frac{p}{q} \frac{4q^2t + r}{4q^2t + r}$ kunne forkortes i det mindste med r, og i saa Fald voxe Afvigelserne ikke, kunne endog formindskes til 1. Ligeledes, hvis r gaar op i t. Gives der nu andre lignende Tilfæide, hvor de Oppermannske Tilnærmelsesbrøker alle falde paa Kjædebrøks-konvergenter?

Valgkredssystemet og Minoriteten.

(Af L. Lorenz.)

Ved Discussionen i Dagbladene af de sidste Folkethingsvalg har der, ganske ligesom for tre Aar siden, været bragt Spørgsmaal paa Bane, som strejfe saa stærkt ind paa Mathematikens Omraade, at de egentlig ikke kunne klares rigtig uden dennes Hjælp. Jeg mener hermed, Spørgsmaalet om Virkningen af Valgkredssystemet paa Minoritetens Repræsentation i Thinget, og om hvilken Betydning, Antallet af Valgkredse maa antages at have herpaa. Da Behandlingen af disse Spørgsmaal ved Hjælp af Sandsynlighedsberegningen ogsaa i ren mathematisk Henseende forekommer mig at have nogen Interesse, skal jeg tillade mig at føre Tidsskriftets Læsere ind paa denne Undersøgelse.

Der forudsættes, at der er lige mange afgivne Stemmer i hver Valgkreds, og at Majoriteten i hver Kreds vælger sin Kandidat. Antallet af Stemmer i hver Valgkreds antages for Simpelheds Skyld at være et ulige Tal, for at man altid kan være sikker paa, at der ved hvert Valg vil finde en Afgjørelse Sted. Der spørges nu om det sandsynligste Antal Valg, som et enkelt Parti, der har alle andre Fraktioner imod sig, kan sætte igjennem, naar det i Alt raader over en vis Brøkdel s af det hele Antal Stemmer, og disse antages tilfældig fordelte i Kredsene, saaledes at alle mulige Fordelinger ere lige sandsynlige.

Valgkredsenes Antal være betegnet ved m, Antallet af Stemmer i hver Valgkreds ved n og Antallet af Partiets Stemmer i alle Kredse tilsammen ved p. Man vil altsaa have $p = mns$.

Endvidere ville vi betegne Antallet af alle de forskjellige mulige Fordelinger af Partiets Stemmer ved n_m^p, og Antallet af de Tilfælde, hvori Partiet er i Majoritet i en Kreds ved N_m^p. Det sandsynligste Udfald af Valgene vil da være, at Partiet vil kunne sætte Brøkdelene $N_m^p : n_m^p$ af det hele Antal

Valgte (m) igjennem. Denne Brøkdel være betegnet ved q. Iblandt Vælgerne tilhører altsaa Partiet 100s Procent, medens det sandsynligst vil blive repræsenteret i Thinget med 100q Procent.

Lad os for Exempel antage $n = 5$, $s = 0,4$ og efterhaanden m lig 1, 2, 3. Er der kun en Valgkreds ($m = 1$), vil kun et Tilfælde være muligt og Partiet vil være i Minoritet. Altsaa er her $n_1^2 = 1$ og $N_1^2 = 0$. Er der to Kredse ($m = 2$), vil Partiet i Alt have 4 Stemmer og disses Fordeling i de to Kredse vil kunne være

4 0, 3 1, 2 2, 1 3, 0 4.

Antallet af Tilfælde er altsaa 5 og heraf sejrer Partiet i den enkelte Kreds 2 Gange. Altsaa er her $n_2^4 = 5$, $N_2^4 = 2$.

Er der tre Kredse ($m = 3$), vil Partiet i Alt have 6 Stemmer. Antallet af Tilfælde, i hvilke der i første Kreds er ingen Stemmer, er n_2^6, 1 Stemme vil der være i n_2^5 Tilfælde, 2 Stemmer i n_2^4 Tilfælde, osv. indtil 5 Stemmer i n_2^1 Tilfælde. Altsaa er

$$n_3^6 = n_2^6 + n_2^5 + n_2^4 + n_2^3 + n_2^2 + n_2^1,$$

medens Antallet af de Tilfælde, i hvilke Partiet er i Majoritet i Kredsen, maa være bestemt ved

$$N_3^6 = n_2^3 + n_2^2 + n_2^1.$$

Det vil nu let ses, at de almindelige Udtryk for n_m^n og N_m^p maa blive

$$n_m^p = n_{m-1}^p + n_{m-1}^{p-1} + \dots n_{m-1}^{p-1} \qquad (1)$$

$$N_m^p = n_{m-1}^{p-\frac{n+1}{2}} + n_{m-1}^{p-\frac{n+3}{2}} + \dots n_{m-1}^{p-n} \qquad (2)$$

I de umulige Tilfælde, at man har $p < 0$ eller $p > mn$ maa man have $n_m^p = 0$. Er $m = 1$ haves $n_1^p = 1$ for $p = 0, 1, 2 \dots n$, men $n_1^p = 0$ for $p < 0$ eller $p > n$. Dette vil ogsaa kunne udtrykkes ved den enkelte Ligning

$$n_1^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-p\theta i}(1 + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \dots e^{n\theta i}),$$

hvor højre Side ligeledes bliver 1 for $p = 0, 1, 2 \dots n$, men

o, naar p ligger uden for disse Grænser. Ved Summation af Rækken erholdes

$$n_1^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-p\theta i}\, \frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}}.$$

Dernæst erholdes af Ligning (1)

$$n_2^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \left(e^{-p\theta i} + e^{-(p-1)\theta i} + \dots e^{-(p-n)\theta i}\right) \frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}},$$

altsaa

$$n_2^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-p\theta i} \left(\frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}}\right)^2,$$

og endelig almindelig

$$n_m^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-p\theta i} \left(\frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}}\right)^m. \qquad (3)$$

Ved Hjælp af denne Formel gaar Ligning (2) over til

$$N_m^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-p\theta i} \left(e^{\frac{n+1}{2}\theta i} - e^{(n+1)\theta i}\right) \frac{\left(1 - e^{(n+1)\theta i}\right)^{m-1}}{\left(1 - e^{\theta i}\right)^m}. \qquad (4)$$

Fra disse to bestemte Integraler kunne vi atter komme tilbage til Rækkeudviklinger. Sættes $e^{\theta i} = z$, bliver

$$n_m^p = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{(1-z)^m}\, z^{-p-1}\left(1 - z^{n+1}\right)^m,$$

hvor Integrationen med Hensyn til den komplexe Variable z bliver at udstrække over en sluttet Kreds om Begyndelsespunktet. Ved $m - 1$ Gange udført delvis Integration gaar Integralet over til

$$n_m^p = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(-1)^{m-1}}{[m-1]}\int \frac{dz}{1-z}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\, z^{-p-1}\left(1 - z^{n+1}\right)^m.$$

Heri udvikles $(1 - z^{n+1})^m$ efter Binomialformlen og de angivne Differentiationer udføres. Bemærkes det nu, at man almindelig, naar q er et helt Tal, har

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{1-z}\,z^{q-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta\, e^{q\theta i}}{1-e^{\theta i}}=\begin{cases}1 \text{ for } q \leqq 0\\ 0 \text{ for } q>0\end{cases},$$

vil det ses, at det almindelige Led i Udviklingen efter Binomialformlen, som er

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2\pi i\,[m-1]}\int\frac{dz}{1-z}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,(-1)^r\,\frac{m\,(m-1)\ldots m-r+1}{1\,.\,2\ldots r}\,z^{r(n+1)-p-1},$$

vil blive 0, naar Exponenten til z eller $r\,(n+1)-p-1$ bliver positiv eller 0, og lig

$$\frac{(-1)^r}{[m-1]}\;\frac{m\,(m-1)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}\;\frac{[p+m-1-r\,(n+1)]}{[p-r\,(n+1)]},$$

for $r\,(n+1)<p+1$. Har man $r\,(n+1)=p$, kan ovenstaaende Udtryk multipliceres i Tæller og Nævner med $p+1-r\,(n+1)=1$.

Saaledes erholdes

$$[m-1]\,n_m{}^p=\frac{[p+m-1]}{[p]}-\frac{m}{1}\,\frac{[p+m-1-(n+1)]}{[p-(n+1)]}+\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{[p+m-1-2\,(n+1)]}{[p-2\,(n+1)]}\ldots\ldots \quad (5)$$

hvor Rækken kun fortsættes saalænge, som de i Nævnerne indgaaende Størrelser p, $p-(n+1)$, $p-2\,(n+1)$, ... ere positive eller Nul. Er dette sidste Tilfældet sættes $[0]=1$.

Paa ganske lignende Maade findes

$$\left.\begin{aligned}[m-1]\,N_m{}^p=\;&\frac{[p+m-1-\frac{1}{2}(n+1)]}{[p-\frac{1}{2}(n-1)]}-\frac{m-1}{1}\,\frac{[p+m-1-\frac{3}{2}(n+1)]}{[p-\frac{3}{2}(n+1)]}\\&+\frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,\frac{[p+m-1-\frac{5}{2}(n+1)]}{[p-\frac{5}{2}(n+1)]}\ldots\ldots\\&+\frac{[p+m-1-(n+1)]}{[p-\frac{1}{2}(n+1)]}-\frac{m-1}{1}\,\frac{[p+m-1-2\,(n+1)]}{[p-2\,(n+1)]}\\&+\frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,\frac{[p+m-1-3\,(n+1)]}{[p-3\,(n+1)]}\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(6)$$

hvor ligeledes Rækkerne kun fortsættes saalænge, de i Nævnerne indgaaende Størrelser blive positive eller Nul.

Naar m, n og p ere smaa Tal, ville disse Rækkeudviklinger give den simpleste Løsning af Opgaven, men det er

netop dette, som i den her forelagte praktiske Anvendelse ikke er Tilfældet. Betragte vi nu først Antallet af alle Stemmer og Antallet af Partiets Stemmer som meget store i Sammenligning med Antallet af Kredse, vil Rækken (5) nærme sig Grænseværdien

$$[m-1]\, n_m{}^p = p^{m-1} - \frac{m}{1}(p-n)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(p-2n)^{m-1} \ldots,$$

eller, naar heri sættes $p = mns$,

$$[m-1]\, n_m{}^p = n^{m-1}\left[(ms)^{m-1} - \frac{m}{1}(ms-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(ms-2)^{m-1} - \ldots\right], \qquad (7)$$

hvilken Række kun fortsættes saalænge $ms - 1$, $ms - 2$, ... forblive positive. Ligeledes erholdes med tilsvarende Betingelser for Rækkernes Ophør

$$[m-1]\, N_m{}^p = n^{m-1}\left[(ms - \tfrac{1}{2})^{m-1} - \frac{m-1}{1}(ms - \tfrac{3}{2})^{m-1} + \ldots - (ms-1)^{m-1} + \frac{m-1}{1}(ms-2)^{m-1} - \ldots\right). \qquad (8)$$

Ogsaa for disse Rækker vil det imidlertid være nødvendigt at bestemme de til $m = \infty$ svarende Grænseværdier, for saa vidt som de indgaa i Forholdet $N_m{}^p : n_m{}^p = q$. Hertil kan der med Fordel benyttes de (3) og (4) givne Udtryk ved bestemte Integraler.

Sættes heri $(n+1)\theta = 2x$, $p = mns$, og betragtes n og p som uendelig store Tal, erholdes

$$n_m{}^p = \frac{1}{\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2smxi}\left(\frac{1 - e^{2xi}}{1 - e^{\frac{2x}{n}i}}\right)^m$$

$$= \frac{n^{m-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}\, e^{-(2s-1)mxi}\left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^m,$$

hvilket sidste Udtryk let gives den reelle Form

$$n_m{}^p = n^{m-1}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^m}\cos amx\sin^m x, \text{ idet } a = 2s - 1.$$

Paa lignende Maade erholdes af (4)

$$N_m^p = n^{m-1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^m} \cos(am - \tfrac{1}{2})x \sin\tfrac{1}{2}x \sin^{m-1} x.$$

Indføres Betegnelsen

$$f_m(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^m} \sin amx \sin^{m-1} x, \tag{9}$$

vil man erholde

$$n_m^p = \frac{1}{2} n^{m-1} \left(f_m(a + \tfrac{1}{m}) - f_m(a - \tfrac{1}{m}) \right) \tag{10}$$

$$N_m^p = \frac{1}{2} n^{m-1} \left(f_m(a) - f_m(a - \tfrac{1}{m}) \right), \tag{11}$$

hvorefter Forholdet q vil være bestemt ved

$$p = \frac{f_m(a) - f_m(a - \frac{1}{m})}{f_m(a + \frac{1}{m}) - f_m(a - \frac{1}{m})}. \tag{12}$$

For nu at finde den til $m = \infty$ svarende Grænseværdi af q, ville vi differentiere Udtrykket (9) med Hensyn til a, hvorved erholdes

$$\frac{d f_m(a)}{da} = f'_m(a) = \frac{m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{m-1}} \sin^{m-2} x [\sin(am+1)x - \sin(am-1)x],$$

medens Integralet (9) med delvis Integration giver

$$f_m(a) = \frac{1}{\pi(m-1)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{m-1}} \sin^{m-2} x [(am + m - 1)\sin(am+1)x$$
$$-(am - m + 1)\sin(am - 1)x].$$

Af disse to Ligninger findes uden Vanskelighed

$$(m-1) f_m(a + \tfrac{1}{m}) - (m-1) f_m(a - \tfrac{1}{m})$$
$$= (a+1) f'_m(a + \tfrac{1}{m}) - (a-1) f'_m(a - \tfrac{1}{m}).$$

Heri sættes

$$fm(a) = e^{\varphi_m(a)},$$

og $\varphi_m(a \pm \frac{1}{m})$ udvikles efter Taylors Række. Gaa vi da til Grænsen $m = \infty$, vil Ligningen reduceres til

$$m e^{\varphi_m'(a)^{\frac{1}{m}}} - m e^{-\varphi_m'(a)^{\frac{1}{m}}}$$

$$= (a + 1)\varphi_m'(a) e^{\varphi_m'(a)^{\frac{1}{m}}} - (a - 1)\varphi_m'(a) e^{-\varphi_m'(a)^{\frac{1}{m}}},$$

eller, naar $\varphi_m'(a)^{\frac{1}{m}}$ sættes lig x,

$$e^x - e^{-x} = (a + 1) x e^x - (a - 1) x e^{-x}. \qquad (13)$$

Ved Hjælp af denne Ligning kan man erholde x udviklet efter Potenser af a, af hvilken Række de første Led blive

$$x = -3a - \frac{9}{5} a^3 - \frac{3 \cdot 9 \cdot 11}{5^2 \cdot 7} a^5 - \frac{9^2 \cdot 19}{5^3 \cdot 7} a^7 \ldots\ldots$$

Da kun det første Led i denne Udvikling bliver benyttet i det følgende, skal jeg her ikke opholde mig ved at vise, paa hvilken Maade denne Rækkeudvikling bekvemmest lader sig beregne.

Dernæst kan q bestemmes ifølge (12) ved Ligningen

$$q = \frac{1 - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 1}. \qquad (14)$$

Det vil heraf ses, at naar a er meget lille og altsaa s meget nær lig $\frac{1}{2}$, saa vil man have $x = -3a$, $q = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} a$, eller, da $a = 2s - 1$,

$$\frac{1}{2} - q = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - s\right).$$

Naar altsaa en Minoritet meget nær udgjør Halvparten af alle Stemmer, saa vil det Antal Procent, Minoriteten mangler i de 50 Procent, blive forøget en halv Gang ved Partiets Repræsentation i Thinget.

Kan man ikke betragte a som en meget lille Størrelse, saa udføres Beregningen lettest ved at indsætte vilkaarlige Værdier for x i de to Ligninger (13) og (14). Saaledes giver $x = 1$

$$a = -0{,}3130, \quad s = 0{,}3435, \quad q = 0{,}2689,$$

medens man, hvis ovenstaaende Regel endnu var gjældende vilde have $q = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} a = 0{,}2652$.

Heraf ses, at de to saaledes beregnede Værdier af q,

ikke ere mere forskjellige, end at man, naar man kun forlanger to rigtige Cifre, endnu kan anvende Reglen paa Minoriteter af lidt over 30 Procent.

Spørge vi tillige om Indflydelsen af Valgkredsenes Antal, kunne vi dernæst med den samme Værdi af s beregne q ved Hjælp af Rækkerne (7) og (8) for $m = 1, 2, 3, \ldots$ Jeg har saaledes fundet

for $m = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots 10$

$q = 0, \quad 0{,}2722, \quad 0{,}2648, \quad 0{,}2580, \quad 0{,}2607, \quad \ldots 0{,}2644.$

q nærmer sig saaledes med voxende m temmelig hurtig til den ovenfor beregnede Grænseværdi 0,2689. Da det tillige ved Talexempler kan paavises, at jo mere s nærmer sig $\frac{1}{2}$, desto hurtigere vil q med voxende m konvergere til sin Grænseværdi, saa kan som en anden, paa Sandsynlighedsregningen grundet, praktisk Regel fastsættes, at naar Minoriteten ikke gaar under 30 Procent og Valgkredsenes Antal ikke under 10, saa vil Partiets Repræsentation i Thinget ikke afhænge af Kredsenes Antal.

Danske Examensopgaver.

Polyteknisk Examen for Kemikere.

Jan. 1890.

Man skal integrere Differentialligningen

$$y = x\left(1 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\right)$$

saaledes, at man finder baade det fuldstændige Integral og de partikulære Opløsninger (singulære Integraler). Hvilken Slags Kurver fremstiller det fuldstændige Integral, idet x og y ere retvinklede Koordinater, og hvorledes ere de beliggende i Forhold til Koordinatsystemet og i Forhold til de ved de

partikulære Opløsninger (singulære Integraler) fremstillede Kurver?

Opløsning. Differentialligningen

$$y = x(1 + 2p^2 - 2p) \tag{1}$$

differentieres m. H. t. x. Derved faas

$$\frac{dp}{p-1} = -\frac{dx}{2x}, \; p - 1 = \frac{C}{\sqrt{x}} \tag{2}$$

Den bortforkortede Faktor, $2p - 1$, giver den partikulære Opløsning $y = \frac{1}{2}x$.

Af (1) og (2) faas det fuldstændige Integral

$$x^2 + y^2 - 2xy + A^2 - 2Ay = 0, \; (A = 2C^2). \tag{3}$$

Af denne Ligning faas de to partikulære Opløsninger

$$x = 0, \; y = \frac{1}{2}x.\text{*)} \tag{4}$$

(3) fremstiller et System af Parabler, (4) to fælles Tangenter til dem. Naar Koordinataxerne drejes en Vinkel paa 45^0, bliver Parabelsystemets Ligning:

$$(y'\sqrt{2} - \frac{A}{2})^2 + \frac{3}{4}A^2 - Ax'\sqrt{2} = 0.$$

Samtlige Parabler have deres Axer parallelle med den nye x-Axe. Deres Toppunkter bestemmes ved

$$x_1' = \frac{3A}{4\sqrt{2}}, \; y_1' = \frac{A}{2\sqrt{2}}.$$

---

*) Det kunde synes, som om Opløsningen $x = 0$ ikke kom frem ved den førstnævnte Behandling. Det maa imidlertid erindres, at man foruden at bortforkorte $2p - 1$ tillige dividerer med $p - 1$ og med x, og man maa derfor undersøge $p - 1 = 0$ og $x = 0$ nøjere. I dette Tilfælde viser det sig da, at begge Ligninger svare til Integraler, og ved Sammenligning med det alm. Integral ses $x = 0$ at være en singulær Opløsning.

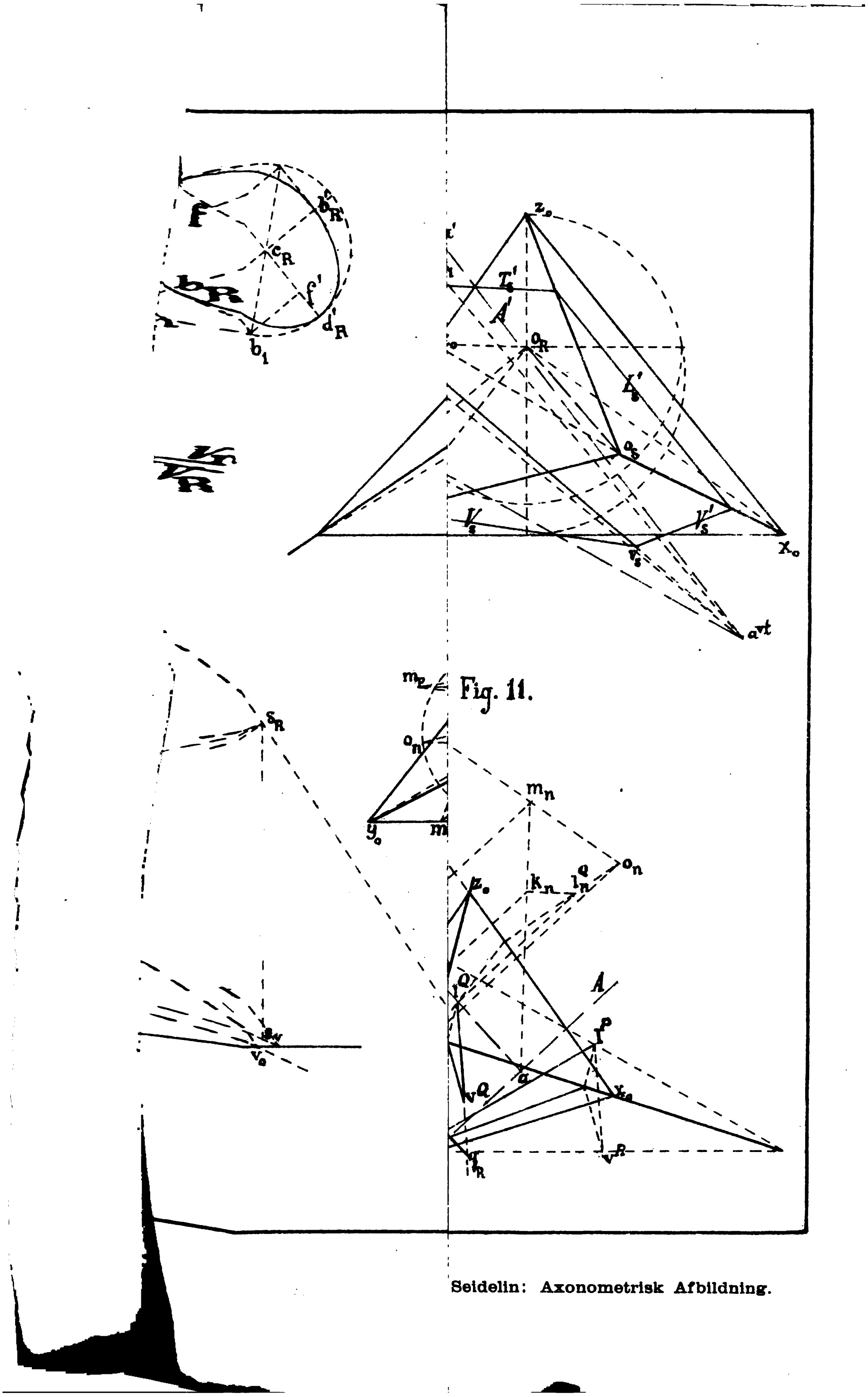


Fig. 11.

Seidelin: Axonometrisk Afbildning.

Axonometrisk Afbildning.

(Af C. Seidelin.)

---

1. Den Art Afbildning, hvor Gjenstanden er henført til et treretvinklet Koordinatsystem og afbildes paa en Billedplan, der er stillet skraat mod det treretvinklede Hjørnes Kanter og Vægge, har i de sidste Aar gjort store Fremskridt. Efterat Hauck i 1876 i en Afhandling om perspektivisk Axonometri*) vel nærmest havde givet en fyldig Afslutning paa Fortidens Betragtninger, var det Pelz, der gjennem flere længere Afhandlinger (1880—85)**) viste, at man i denne Afbildningsmaade godt direkte kunde løse de samme Opgaver, som almindelig løses i de tidligere bekjendte Afbildningsmaader; men ganske vist vare nogle af Løsningerne temmelig vanskelige. Pelz havde imidlertid givet Stødet til Behandling af Sagen, der især i Zürich er taget op med Iver, saaledes af Beyel***), der dog væsentlig støtter sig til Hauck, men navnlig af Weiler†). Det er denne sidstes Arbejder, som jeg i det følgende vil stræbe at bygge lidt videre paa.

2. Retvinklet Axonometri. Det treretvinklede Hjørne XYZ (hvor $XY = V$, $YZ = T$ og $ZX = L$) er givet ved sin Sportrekant $x_0 y_0 z_0$ (Fig. 1) i den axonometriske Billedplan A. Da $X \perp YZ$, vil X_R††) $\perp y_0 z_0$, ligesaa $Y_R \perp z_0 x_0$ og

---

*) Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Von Prof. Hauck (Schlömilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1876).

**) »Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie«. Von Prof. C. Pelz (Sitz. b. der k. k. Akad. d. Wissenschaften 1880-81-84) og »Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie«. Von Prof. C. Pelz. (Sitz. b. d. königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. 1885).

***) Axonometrie und Perspektive. Von Dr. Chr. Beyel. 1887.

†) Afhandling i Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik 1888, og Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Von Dr. A. Weiler. 1889.

††) Mærkerne R, S eller P forneden tilhøjre bruges til at angive retvinklet, skraat eller perspektivisk Billede paa Billedplanen A.

$Z_R \perp x_0 y_0$; derved bestemmes Begyndelsespunktet o's retvinklede Billede o_R, og ved Nedlægning af en af Axernes Sestraaleplaner, f. Ex. ZZ_R, i A faas Distancen $o_R o = o_R o_1$, hvor det af dennes Bestemmelse vil ses, at Sportrekanten ikke maa være stumpvinklet, medens denne retvinklet vilde føre til specielle Tilfælde, der her lades uomtalte.

3. Hovedvanskeligheden i denne Afbildningsart har vel hidtil navnlig ligget i Bestemmelsen af Længder vinkelrette paa Billedplanen, hvilke man stadig har Brug for ved Konstruktionen af geometriske Størrelsers sande Værdi. Koordinatsystemet synes at yde saa lidt til disse Længders Bestemmelse; Weiler har set, at Distancen skal bruges, men efter min Mening har han ikke udnyttet Billedplanen paa bedste Maade; han søger et Punkt m's Afstand fra A ved gjennem m at lægge en ny Billedplan parallel med A; den søgte Afstand er da Forskjellen mellem o's Afstande fra den ny Plan og fra A.

Denne Hovedopgave løser jeg saaledes: den samme Billedplan fastholdes stadig; man bestemmer da Linien mo's axonometriske Spor m_0*) (ved at drage $o_R m_V m_{V0}$ og $m_{V0} z_0$) og nedlægger nu Linien mo med sin Sestraaleplan i A som $o_n m_0$, hvorpaa m_n findes, og den søgte Afstand er $m_R m_n$. Men af denne Nedlægning vil det ses, at den søgte Afstands Forhold til Distancen er (med Fortegn) lig $m_R m_0 : o_R m_0$, saa at man finder den søgte Længde $m_R m_1$ i en forlangt Retning ved at afsætte Distancen $o_R o_1$ i samme eller modsat Retning, eftersom m_0 ligger udenfor eller mellem m_R og o_R, og drage Linien $o_1 m_0 m_1$. Maaske kan man have Brug for Distancecirklen med Centrum o_R og Radius lig Distancen.

Naar m_R falder paa Z_R (uden at m ligger paa Z), kan Opgaven løses ved at nedlægge $m m_V$ med Planen ZZ_R, og denne Methode maa følges, naar m_R falder i o_R, hvor den ny Fremgangsmaade er uanvendelig. Iøvrigt vises senere i Fig. 4, hvorledes man kan opnaa Skæring under heldigere Vinkel (man søger $m_R m_n$ i Stedet for $m^1_R m^1_n$).

*) Betegnelsen m_0 skal udtrykke, at Punktet er et Billede af m for Øjet o.

4. Skal man søge Linien mp's Længde, da gaar man frem som nys for begge Punkters Vedkommende, idet for begge bruges det samme Punkt o_n, bestemt saaledes at $o_R o_n \perp m_R p_R$; da vil $m_n p_n$ være mp's Nedlægning i A, altsaa sand Længde. I Fig. 2 vil vi betragte det specielle Tilfælde, at m og p ere Liniens lodrette og vandrette Spor l og v. $l_0 v_0$ skærer lv i dennes axon. Spor a; ved o_n faas Nedlægningen $l_n a v_n$. Liniens Vinkel med A er $\angle l_R a l_n$.

5. En Plan VT (Fig. 3) nedlægges omkring det axon. Spor A, og det vil kunne udføres, saasnart man har fundet et Punkt y's Afstand $y_R y_1$ fra A (ved Hjælp af Punktet o_1, hvor $o_R o_1 \perp a y_R$, altsaa $o_R o_1 \neq A$).

Planens Vinkel med A er $y_R a y_1$. Idet Punktet y nedlægges som y_n, faas $\angle VT = \angle V_n T_n$.

For Ellipsebilledet af en Cirkel, der ligger i Planen og har Centrum c samt Radius $c_R d_R$, er bestemt Toppunkterne d_R og d'_R ($d_R c_R d'_R \neq A$), b_R og b'_R (fra Nedlægningen b_n om $d_R d'_R$, idet $c_R b_1 \neq a y_1$) samt Brændpunkter f og f^1.

6. Gjennem Punktet m (Fig. 4) skal lægges en Plan vinkelret paa Linien vl. Den søgte Plan indeholder en Frontlinie M gjennem m og vinkelret paa vl's Sestraaleplan — og skærer denne Sestraaleplan i en Linie vinkelret paa vl og gjennem det Punkt m', hvor M skærer vl's Sestraaleplan. For at bestemme denne vinkelrette, nedlægges Sestraaleplanen og dermed vl og m' om $v_R l_R$; ved Hjælp af o_n findes $v_n l_n$ og m'_n, idet $m'_R m'_n = m_R m_n$. Den vinkelrette $m'_n p_n a$ bestemmer den søgte Plans axon. Spor A, og man tegner nu den søgte Plans Spor V, L og T gjennem M's og A's tilsvarende Spor, idet M's Spor v^M, l^M og t^M bestemmes ved Hjælp af Planen Mo's axon. Spor A' (gjennem m_0).

m's Afstand fra Linien vl er Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvis Katheter ere $m_R m'_R$ og $m'_n p_n$.

Det vil nu let indses, hvorledes man bestemmer Sporene for en Plan, hvori en Cirkel skal ligge, der er givet ved sit Centrum samt Toppunkterne af Cirklens axon. Billede: den

4*

store Axe er en Frontlinie i den søgte Plan, og denne Frontlinies Spor findes som M's i Fig. 4; tillige findes et Punkt af Planens axon. Spor ved Nedlægning af Sestraaleplanen gjennem den lille Axe, idet Planens Vinkel med A jo er bestemt ved Axelængderne.

7. Man skal bestemme en Kugle c's Selv- og Slagskyggelinie paa V, idet Lyset udgaar fra Punktet s (Fig. 5).

Man nedlægger cs med sin Sestraaleplan som $c_n s_n$, og her bestemmes Selvskyggelinien $m_n p_n q_n$, hvoraf Ellipsen $m_R p_R q_R r_R$ udledes med lille Axe $m_R q_R$ og store Axe af Længde $m_n q_n$, medens p_R og r_R ere Røringspunkterne med Kuglens Omrids. Af Slagskyggen paa V bestemme vi de Punkter, der ere Skygge af de 4 nævnte Punkter af Selvskyggelinien, samt deres Tangenter: m_S og q_S findes af deres Nedlægning m_{sn} og q_{sn}, der faas ved Skæring mellem de nedlagte Lysstraaler $s_n m_n$ og $s_n q_n$ — og Nedlægningen $v^A x_n$ af Skæringslinien mellem Sestraaleplanen (der nedlægges) og V (hvor x_n ligger paa $o_n x_o$). Tangentplanerne langs sm og sq skære hinanden i en Frontlinie sv vinkelret paa Sestraaleplanen, og denne Frontlinies vandrette Spor er bestemt ved Hjælp af det axon. Spor $s_o v_o$ for Planen gjennem Frontlinien og Punktet o. Gjennem v gaa de to Tangentplaners vandrette Spor, saa at den søgte Kurves Tangenter i m_S og q_S gaa gjennem v_R. Linierne $s_R p_R$ og $s_R r_R$ afbilde Tangentplaner, der ere Sestraaleplaner, altsaa ere de ogsaa Tangenter til Slagskyggekurven; disses Røringspunkter faa vi paa en Gang ved at søge Skæring mellem V og Planen prs, der hører med til Planbundtet med Axe sv, saa at det søgte vandrette Spor gaar gjennem v. Idet u er pr's Midtpunkt, der ligger i Planen msq, finde vi i denne Plans Nedlægning gjennem u_{Sn} Punktet u_S, som forbundet med v_R giver baade p_s og r_s. Af den søgte Slagskyggelinie kjende vi altsaa 4 Punkter og deres Tangenter; $u_S s_R v_R$ er Polartrekant for Keglesnittet, hvis Punkter og Tangenter da let kan bestemmes.

Dersom s er uendelig fjernt, vil $s_R v_R$ ogsaa være det, u_S altsaa være Centrum, $m_S q_S$ og $p_S r_S$ et Par konjugerede Diametre, der strax føre til Ellipsens Toppunkter; for at bestemme Linien $p_S r_S$ i dette Tilfælde, hvor v_R er uendelig fjernt, kan man bestemme Punktet d ved Hjælp af det axon. Spor bd for Lysstraaleplanen gjennem pr.

8. Skraa Axonometri. Atter her gaar man ud fra Sportrekanten $x_0 y_0 z_0$ (Fig 6) i Forbindelse med det retvinklede Koordinatsystems skraa Billede (bestemt ved Punktet o's skraa Billede o_S). Sportrekanten bestemmer jo det tresidede Hjørne i Rummet ved det retvinklede Billede o_R af o og Distancen $o_R o_1$. Man kjender da Retningen $o_S o_R$ af de skraa Sestraalers retvinklede Billede paa A, og ved Nedlægning af den retv. Trekant $o_S o_R o$ som $o_S o_R o_n$ faar man den Vinkel $o_R o_S o_n$, som de skraa Sestraaler danne med A.

9. De tidligere løste Opgaver behandles her saaledes, at man, naar det gjøres fornødent, gaar til retv. Afbildning, hvilket udføres særdeles let ved Hjælpelinier gjennem o. Thi naar Punktet m er givet ved m_S og m_V, bestemmes m_0 som tidligere, og Linien m_0's retv. Billede er da $o_R m_0$, hvorpaa m_R findes ved $m_S m_R \neq o_S o_R$.

10. I Fig. 7 er bestemt sand Størrelse af Vinklen lmv. Linien $m_0 l_0$ skærer $m_S l_S$ i dennes axon. Spor a^{ml}, ligeledes skæres $m_S v_S$ i a^{mv}. Vinklens Plan nedlægges om dennes axon. Spor $a^{ml} a^{mv}$, hvorved m (gjennem m_R og m_1) kommer i m_n, og Vinklen er nedlagt som $\angle a^{ml} m_n a^{mv}$.

11. To Planers Rumvinkel. I Fig. 8 skære Planerne VT og $V^1 L^1 T^1$ hinanden i Linien vt med axon. Spor a^{vt}, hvor Planernes axon. Spor A og A^1 skære hinanden. Af t_S bestemmes t_R (ved t_0) og Skæringsliniens retv. Billede $a^{vt} t_R$, om hvilken Skæringslinien nedlægges i A som $a^{vt} t_1$. Her kan man bestemme en Plan vink. paa $a^{vt} t$ ved $t_1 c \perp a^{vt} t_1$ og $a c a^1 \perp a^{vt} t_R$. t nedlægges om $a a^1$ i A som t_n, og den søgte Vinkel er $a t_n a^1$. Det ses, at Konstruktionen er meget lidt vidtløftigere end i retvinklet Axonometri.

12. *Perspektivisk Axonometri.* Fremdeles skal det kortelig vises, at Løsningen er lige saa simpel i perspektivisk Afbildning, hvor det treretvinklede Hjørne er givet ved Sportrekanten $x_0\, y_0\, z_0$ (Fig. 9), der jo bestemmer o_R og Distancen $o_R\, o_n$, medens Øjet er givet ved sit retvinklede Billede $ø_R$ (Hovedpunktet) og Øjets Distance $ø_R\, ø_n$. Idet $ø_R ø_n \neq o_R o_n$, vil $o_n\, ø_n$ skære $o_R\, ø_R$ i Punktet o's Perspektiv o_P, og derved er Axernes Perspektiv bestemt, f. Ex. $z_0 o$, hvis Retningspunkt u^Z ligger paa $ø_R\, u^Z \neq o_R\, z_0$. Man faar let Retningstrekanten $u^X\, u^Y\, u^Z$ ligedannet og ensstillet med $\triangle\, x_0\, y_0\, z_0$ m. H. t. Punktet o_P.

Punktet m (givet ved m_P og m_V, idet $m\, m_V \neq$ Z-axen) har en Afstand fra A, der bestemmes ved at søge denne Plans Skæringspunkt m_0 med $m\, o$ ($o_P\, m_V\, m_{V0}$ trækkes, $m_{V0}\, z_0$ skærer $m_P\, o_P$ i m_0) og derved m's retvinklede Billede m_R som Skæringspunkt mellem $o_R\, m_0$ og Sestraalen $ø\, m\, m_P$'s retvinkl. Billede $ø_R\, m_P$. Nu kan m's Afstand findes ,som i retv. Axon. eller ved Nedlægning om $m_P\, ø_R$ af $\triangle\, m_P\, ø_R\, ø$.

Naar ø er uendelig fjern i en skraa Retning for A, er $ø_R$ uendelig fjern paa Linien $o_R\, o_P$, og man kommer tilbage til skraa Axonometri.

Da Perspektivlæren er gjennempløjet i Aarhundreder, har jeg ikke opholdt mig videre ved denne Gren af Perspektivlæren. Derimod har den skraa Axonometri hidtil kun været lidt dyrket, saa at her maatte et Par Exempler vise, at denne Art af Afbildning nu er kun lidet vanskeligere end den retv. Axonometri.

13. *Skævvinklet Koordinatsystem.* Endelig skal det bemærkes, at da den Omstændighed, at Koordinatsystemet er treretvinklet, kun er brugt til at bestemme Punktet o_R og Distancen $o_R\, o$, og det hvad enten Afbildningen var retvinklet, skraa eller perspektivisk, saa kan Methoderne i det foregaaende ogsaa bruges, selv om *det tresidede Hjørne er skævvinklet*, naar man kjender Sportrekanten og Be-

gyndelsespunktet o's retvinklede Billede o_R samt Distancen o_R o (for skævvinklet Afbildning desuden o_S, for perspektivisk: o_P og $ø_R$).

Lad os først se, hvorledes disse Størrelser kunne bestemmes, naar det tresidede Hjørnes Sider (Sidevinkler) ξ, η og ζ ere givne. Disse afsættes ved Siden af hinanden om Punktet o_u (Fig. 10), og udad Kanterne afsættes de Længder, som den axonometriske Billedplan skal afskære af dem; derved bestemmes Længden af Siderne i Sportrekanten $x_0\, y_0\, z_0$, der derpaa konstrueres. Ved fra o_u at fælde de vinkelrette $o_u v o_R$ og $o_u t_u$, hvilken sidste drejes om i Stillingen $t o_R$, findes o_R, og ved Cirklen $o_u o_u$ om v faas Distancen $o_R o_u$. Omvendt er Hjørnet jo bestemt ved Sportrekanten, o_R og $o_R o_u$.

I Fig. 11 er givet to Linier P og Q og søgt disse Liniers Afstand ved gjennem P at lægge en Plan parallel med Q, hvilken faar axon. Spor A; man søger f. Ex. 1^Q's Afstand fra Planen, hvilket sker ved at nedlægge Sestraaleplanen gjennem 1^Q og vink. paa A, og man faar — ved Hjælp af Distancen $o_R o_u \neq A$ — 1^Q_n og de to Planers Skæringslinie nedlagt som $a m_n$ (ved Hjælp af m_0). Den søgte Længde er da $1^Q_n k_n$, og ved at føre k_n tilbage som k_R samt drage $k_R p_R \neq 1^Q v^Q$ faas endelig den korteste Afstand, der træffer de givne Linier i p og q.

14. Det vil af det foregaaende ses, at Anvendelsen af Hjælpelinier og Hjælpeplaner gjennem Begyndelsespunktet og disses axonometriske Spor finde rig Anvendelse i al axonometrisk Afbildning (hvad enten Koordinatsystemet er retvinklet eller skævvinklet, hvad enten Afbildningen er retvinklet, skraa eller perspektivisk), idet en Opgaves Løsning derved i det væsentlige føres tilbage til de i dobbelt retvinklet Afbildning brugte Methoder.

Om Kredsvalgproblemet.

(Af T. N. Thiele.)

Naar jeg i det følgende maa fremsætte en Anke mod Hr. Etatsraad Lorenz's Artikel om »Valgkredssystemet og Minoriteten«, skal jeg strax bemærke at min Indvending er rettet mod dette Arbejdes Forudsætning og derfor vilde være af forsvindende Betydning, dersom den var rettet imod en rent mathematisk Løsning af en selvvalgt Opgave. Men Sandsynlighedsregningen udskiller sig jo af Mathematiken ved at have en væsentlig praktisk Karakter, dens Opgaver ere ikke selvvalgte, men stilles os af Virkeligheden.

Derfor bliver det alt andet end ligegyldigt, ja for mulige praktiske Anvendelser ligefrem farligt, naar som her en formelt meget fin mathematisk Behandling bliver en Sandsynligheds-regningsopgave til Del paa Grundlag af en Forudsætning, hvis Forhold til Virkligheden Forfatteren ikke en Gang gjør Forsøg paa at oplyse.

I mine Tanker maa det endog betegnes som en ligefrem Fejl, at Hr. L. kun gjør sin Forudsætning afhængig af Partiernes samlede Styrke og Kredsenes Antal, medens der aabenbart ved Siden heraf er andre væsentlige Omstændigheder, der have Indflydelse paa Valgresultaterne paa en saa variabel Maade, at Kredsvalgenes Resultater ikke blot kunne være væsentlig forskjellige hos forskjellige Nationer, men at man endog med samme Vælgermasse og samme Kredse, maa være forberedt paa, at fra det ene Valg til det næste kan Antallet af de Valg, et Parti har Udsigt til at sætte igjennem, forandres.

Den alt andet overvejende Omstændighed ved Kredsvalgene, hvortil jeg herved sigter, den Omstændighed, uden hvilken der overhovedet ikke vilde være nogen Mulighed for, at Minoriteter kunde blive repræsenterede ved Kredsvalg — altsaa heller intet Kredsvalgsproblem, — er Vælgernes Uselvstændighed og Afhængighed af Naboers, Slægts, Venners og andres Meninger. Selv en blot tilnærmet og foreløbig Løsning af Problemet er

kun mulig paa Betingelse af, at det kan lykkes nogenlunde at tage denne Uselvstændighed med i Beregning.

For at gjøre et Forsøg i denne Retning maa jeg gaa ud fra den Hypothese, at man med Forbigaaelse af visse unægtelig existerende Mellemarter kan inddele enhver Vælgermasse i to Arter, saadanne, som helt og holdent rette sig efter andres Meninger, og saadanne, som helt selvstændigt paa en for andre uberegnelig og derfor tilfældig Maade danne sig deres Mening. Hyppigheden af denne sidste Slags Vælgere eller af uafhængige Meningscentrer maa forndsættes at være meget variabel; den, eller hvad dertil svarer, er sikkert afhængig af paagjældende Samfunds Udviklingstrin og Natur; den afhænger sikkert ogsaa i høj Grad af de Spørgsmaal, som til den givne Tid skille Partierne fra hinanden. Ere Tvistepunkterne lokale og meget simple, vil Antallet af uafhængige Meninger i en Kreds sikkert være meget lille; drejer det sig derimod om meget tvivlsomme Sager og rent personlige Stemninger, vil der blive mange, som baade nødes til og fatte Mod til selv at have en Mening.

Hvis jeg tilsigtede en udtømmende Løsning af Kredsvalgsproblemet, maatte jeg tilvisse tage Hensyn til hine Mellemarter og vise, hvor godt jeg ved, at selv de uafhængigste Meninger ikke ere hævede over ydre Paavirkning, og at selv de afhængigste Vælgere ikke ere Slaver. Det er mig heller ikke ubekendt at et og samme Meningscentrum kan paavirke flere Valgkredse; men alt dette lader jeg ligge, saa meget mere som Vejen til disse mere indviklede Problemers Behandling sikkert gaar igjennem og ikke udenom den simplere Forudsætning, som jeg her har opstillet.

Af Antallet af de uafhængige Meningscentrer i hver Kreds afhænger kun Gjennemsnitsantallet af de passive Vælgere, der slutte sig til hvert Meningscentrum. Det burde vist forudsættes, at der er stor Forskjel paa Antallet af de Drabanter, som følge med hvert. Men da jeg dog kun kan komme til en Slags Gjennemsnitsbestemmelse kan jeg vel tillade mig at simplificere

Sagen yderligere ved den Antagelse, at der slutter sig ligemange Drabanter om hvert Meningscentrum.

Rigtignok hænder det vel ofte, at Stridsspørgsmaalene tage sig væsentlig simplere ud fra det ene Partis Synspunkt end fra det andet, og da kan den uafhængige Vælgers Tilslutning til det ene Parti forøge, til det andet Parti svække hans Tiltrækningsevne, selv om man regner Drabanterne for helt uselvstændige og endnu mere, dersom man indrømmer den et Spor af egen Mening. Det ligger derfor meget nær at udvide vor Undersøgelse til at omfatte den Forudsætning at de to kjæmpende Partier have indbyrdes ulige Tiltrækninger for Drabanterne, eller som man let ser, at Valgene i Grunden kom til at foregaa efter kvalificeret Majoritet for det ene Partis uafhængige Vælgere; men jeg har ved Forsøg i denne Retning mødt saa store Vanskeligheder, at jeg allerede af Mangel paa Tid maa give Afkald paa at indlade mig paa disse interessante Biundersøgelser.

Anse vi det altsaa for tilstrækkeligt kun at tage Hensyn til de uafhængige Meningscentrers Fordeling mellem de to Partier og disse Centrers Antal i den enkelte Kreds, saa løses derimod Kredsvalgsproblemet uden Vanskelighed; thi det har sikkert kun meget lidt Interesse at undersøge de specielle Betingelser for at slutte fra Forholdet i den enkelte Kreds til Valgenes samlede Udfald. Jeg antager, at i det i Forhold til den enkelte Kreds store Samfund de uafhængige Meninger fordele sig i Forholdet p til q for og imod det betragtede Parti. Denne Fordeling maa her antages for »tilfældig« i dette Ords sædvanlige tekniske Betydning — og ikke i en saadan speciel Betydning, hvori Hr. L. med meget tvivlsom Ret (paa Pg. 40) tillader sig at bruge dette Ord. Omfatter nu den betragtede Kreds n uafhængige Meningscentrer, vil Sandsynligheden*) for, at x af disse udtale sig til Gunst for Partiet — efter det velbekendte Skema: n dobbelt Udtræk af en Urne

*) Her og overalt i det følgende bruger jeg dette lidt farlige Ord kun i Overensstemmelse med min Definition i min alm. Iagttagelseslære Pg. 43.

under Sandsynligheden $\frac{p}{p+q}$ for $\left(\frac{q}{p+q}\right.$ imod) det enkelte Udtræks gunstige Udfald være

$$\frac{|\underline{n}}{|\underline{x}\,|\underline{n-x}} \; \frac{p^x q^{n-x}}{(p+q)^n}.$$

Medens her Partiets forholdsvise Styrke S' maa forudsættes ligefrem lig med Sandsynligheden for, at et selvstændigt Meningscentrum skal slutte sig til Partiet

$$S' = \frac{p}{p+q} \qquad (1),$$

vil da Sandsynligheden S_n for en Valgsejr være

$$S_n = \Sigma \frac{|\underline{n}}{|\underline{x}\,|\underline{n-x}} \; \frac{p^x q^{n-x}}{(p+q)^n} \qquad (2),$$

Σ tagen imellem Grændserne $x = \frac{n}{2}$ og $x = n$. Naar de selvstændige Meningscentrers Antal er ulige, haves særlig

$$S_1 = \frac{p}{p+q}$$

$$S_3 = \frac{p^3 + 3p^2q}{(p+q)^3}$$

$$S_5 = \frac{p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2}{(p+q)^5}$$

o. s. v.

Og fortolker man Forholdet ved lige Værdier for n saaledes, at Sandsynlighederne for Stemmelighed deles lige mellem begge Partier, er endvidere

$$S_2 = \frac{p^2 + pq}{(p+q)^2} = S_1$$

$$S_4 = \frac{q^4 + 4p^3q + 3p^2q^2}{(p+q)^4} = S_3$$

$$S_6 = \frac{p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 10p^3q^3}{(p+q)^6} = S_5$$

o. s. v.

Man ser let, at S_{2r} ved Forkortning med $p + q$ altid bliver $= S_{2r-1}$; til det almindelige Bevis herfor har man nemlig kun Brug for den velbekjendte Sætning, hvorefter en-

hver Binomialkoefficient til $i + 1^{te}$ Grad er Sum af to konsekutive Binomialkoefficienter til i^{te} Grad.

Ved dobbelt Anvendelse af samme Sætning finder man lige saa let det almindelige Bevis for følgende Sætning: Ligesom

$$S_3 - S_1 = 1 \cdot \frac{pq(p-q)}{(p+q)^3}$$

$$S_5 - S_3 = 3 \frac{p^2 q^2 (p-q)}{(p+q)^5},$$

er almindelig

$$S_{2r+1} - S_{2r-1} = \frac{|2r-1}{|r\,|r-1} \frac{p-q}{p+q} \left(\frac{p}{p+q} \cdot \frac{q}{p+q}\right)^r.$$

Heraf følger, at Differenserne S_n — S' kunne udtrykkes som endelige Rækker:

$$S_{2r+1} - S' = S_{2r+2} - S' = S_{2r+1} - S_1 =$$

$$= \frac{pq(p-q)}{(p+q)^3} \left\{1 + 3\frac{pq}{(p+q)^2} + 10\frac{p^2q^2}{(p+q)} + 35\frac{p^3q^3}{(p+q)^6}\right.$$

$$\left. + 126\frac{p^4q^4}{(p+q)^8} + 462\frac{p^5q^5}{(p+q)^{10}} + \ldots\right\} \qquad (3),$$

saaledes at der af denne Række kun medtages de r første Led. Da alle Leddene indenfor Parenthesen ere positive og da Faktoren foran Parenthesen kun bliver $= 0$ for $p = 0$ eller $q = 0$ eller $p = q$, er det hermed bevist, at den af saadanne Valg fremgaaede Majoritet altid maa ventes at være større end den tilsvarende Majoritet i Vælgermassen eller i de uafhængige Meningscentrer; kun med Undtagelse af Tilfældet $r = 0$, som indtræffer, naar der kun findes et eller to uafhængige Meningscentrer i den enkelte Kreds. Jo flere uafhængige Meningscentrer der findes, desto mere trykke Valgene Minoriteten, for $r = \infty$ bliver Majoriteten eneraadende. Dette fremgaar deraf, at Parenthesen i (3) ved Rækkens Fortsættelse i det uendelige bliver Udtryk for $\frac{(p+q)^2}{p(p-q)}$ eller $\frac{(p+q)^2}{q(q-p)}$ eftersom $p \gtrless q$, medens den divergerer for $p = q$; derved bliver $S_\infty = 1$ for $p > q$, $S_\infty = 0$ for $p < q$ og ubestemt $= \frac{1}{2}$ for $p = q$. Nærmere Oplysninger faas af følgende lille Tabel med dobbelt Argument, som fremstiller Sandsynligheden for en

Valgsejr som Funktion dels af de uafhængige Meningscentrers Antal n i Kredsen, dels af Partiets forholdsvise Styrke $\frac{p}{p+q}$.

$\frac{p}{p+q}$ =	n = 1 à 2	3 à 4	5 à 6	7 à 8	9 à 10	11 à 12	13 à 14	∞
.10	.10	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
.20	.20	.10	.06	.03	.02	.01	.01	.00
.30	.30	.22	.16	.13	.10	.08	.06	.00
.40	.40	.35	.32	.29	.27	.25	.23	.00
.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	$\frac{0}{0}$
.60	.60	.65	.68	.71	.73	.75	.77	1.00
.70	.70	.78	.84	.87	.90	.92	.94	1.00
.80	.80	.90	.94	.97	.98	.99	.99	1.00
.90	.00	.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Hermed kan Hr. L.'s Resultat sammenlignes, og uagtet hans Forudsætning slet ikke viser hen til Vælgernes Afhængighed, men snarest kunde synes greben ud af Luften, indordner Hr. L.'s Resultat sig godt nok som specielt Tilfælde under mit almindeligere, og ligger imellem dem, hvor Antallet af de uafhængige Meningscentrer i Kredsen vilde være 4 og 5, nærmest det første af disse Tal. Hr. L.'s Sætning, at naar en Minoritet meget nær udgjør Halvparten (jeg kunde gaa under Fjerdedelen) af alle Stemmer, vil det Antal Procenter, Minoriteten mangler i de 50 Procent, blive forøget en halv Gang ved Partiets Repræsentation i Thinget, kan jeg erkjende som noget der kan være rigtigt i det nævnte Tilfælde. Denne specielle Overensstemmelse betyder dog ikke meget, og den turde, da Hr. L. ikke motiverer sin Forudsætning, være at anse som en uforudseelig Hændelse.

Hovedsagen er, at ligesom denne Lov ikke er almengyldig, saa faar Hr. L. ganske Uret, naar han i Slutningen af sin Afhandling opstiller følgende anden Lov, at »naar Minoriteten ikke gaar under 30 Procent og Valgkredsenes Antal ikke under 10, saa vil Partiets Repræsentation i Thinget ikke afhænge af Kredsenes Antal.« Heri er der næppe andet rigtigt end at man under de givne Forudsætninger i Praxis kan slutte ligefrem fra Sandsynligheden for Valgsejr i den enkelte Kreds til Thingets

Sammensætning ifølge Valgene. Vel kan man nemlig ikke ligefrem forudsætte, at de uafhængige Meningscentrers Antal i Kredsenskal være proportionall med Kredsens Størrelse, omvendt proportionalt med Kredsenes Antal, men sikkert er det, at man kan gjøre Kredsenes Antal paa den ene Side saa lille, at der i hvert bliver uafhængige Meningscentrer (eller hvad dertil svarer) nok til at trykke enhver Minoritet til Jorden, og at det paa den anden Side er tænkeligt at forøge Kredsenes Antal saa stærkt, at der ikke kan komme mere end et eller to Meningscentrer paa hver Kreds, hvorved Minoriteten kommer ind i Thinget med usvækket Styrke. Det forekommer mig utvivlsomt, at enhverForøgelse i Kredsens Antal, maa ventes at ville virke hen til at formindske Antallet af uafhængige Meningscentrers Antal i Kredsen, og altsaa til at forbedre Minoritetens Vilkaar.

Vil man anse min her fremsatte Theori for en Tilnærmelse til det Virkelige, saa er den ingenlunde helt anbefalende for Valgmaaden efter Kredse. Denne er ikke gunstig for Udviklingen og Bevarelsen af Uafhængighed i politiske Meninger. Naar Minoriteten føler sig trykket, saa ligger det Kampmiddel altfor nær for den, at udvande Partispørgsmaalene saaledes, at Feldtraabene blive velklingende og egnede til at samle store Mængder af Følgesvende om hver af Partiets selvstændige Talsmænd. I samme Hensigt drives Partidisciplinen op til Undertrykkelse ogsaa af smaa Meningsafvigelser; saa kvæler Minoriteten sine Partifællers Selvstændighed ved Partimøder uden Adgang for Modpartiets Talsmænd o. a. l. Og Majoriteten maa følge samme Spor om end med mindre Tvang paa sig, for ikke at komme til at vælge med færre Drabanter til hvert uafhængigt Meningscentrum, altsaa som ved kvalificeret Stemmeflerhed i Henseende til uafhængige Meningscentrer som Betingelse for Sejren.

Men disse Indvendinger mod Kredsvalgsystemet ramme dog ikke dets Kjærne men kun det Forhold, at man saa godt som altid anvender Kredsvalgsystemet med altfor store, altfor faa Kredse. Efter min Theori maa den trykkede Minoritet

kunne faa en anden og bedre Udvej nemlig Ret til at forlange Valgkredsene delte og forøgede i Antal. Derved maa man tilsidst kunne skaffe Minoriteten repræsenteret ligesaavel som ved kunstige Minoritetsvalgmaader, men rigtignok vilde vel Kredsenes Antal blive saa stort, at Valgene maatte gjøres indirekte.

Løste Opgaver.

1. Ere a, b, c ... m Rødder i f(x) = 0, a′, b′, c′ ... m′ Rødder i f′ (x) = 0, og betegnes ved de samme Bogstaver de paa sædvanlig Maade tilsvarende Punkter i Planen, saa er der Ligevægt i Punkterne a′, b′, c′...m′, naar man i a, b, c ... m tænker sig lige store tiltrækkende Masser, og disse tiltrække omvendt proportional med Afstanden.

Opløsning. Skal der under de angivne Betingelser være Ligevægt, medfører dette, at naar man f. Ex. ud fra Punktet a′ i Retning af f's Rodpunkter afsætter deres reciproke Afstande, maa disses algebraiske (komplekse) Sum være Nul. Da vi ved en Parallelforskydning af Koordinatsystemet kan bringe a′ til at falde i Begyndelsespunktet, og da ved en saadan lineær Transformation den Deriveredes Transformerede netop er den Transformeredes Deriverede, har vi blot at vise, at naar f's afledede Funktion har en Rod i Begyndelsespunktet, og man ud fra dette i Retning af f's Rodpunkter afsætter de reciproke Afstande, er disses algebraiske Sum Nul.

Har f's Rødder Forman r cos θ + i sin θ), skal

$$\Sigma \frac{\cos\theta + i \sin\theta}{r} = 0.$$

Havde vi i Stedet for + haft —, vilde Udtrykket have været Summen af Røddernes reciproke Værdier, og da de to Udtryk ere konjugerte, maa de forsvinde samtidig. (De maa tilmed altid være lige store, altsaa reelle, dersom f har reelle

Koefficienter, da Fortegnsforandringen ej har Indflydelse paa de reelle Rødder, ej heller paa de imaginære, eftersom disse er parvis konjugerte.) Betingelsen for, at den Dividerede til

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

har en Rod i Begyndelsespunktet, ses ved Differentiation at være

$$a_{n-1} = 0.$$

Men ved Betragtning af den givne Lignings reciproke Ligning

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1 = 0$$

ses, at $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ netop er Summen af f's reciproke Rødder. Dermed er Sætningen bevist. (L. Ankjær.)

3. At bestemme den Funktion u af n Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$, for hvilken

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx_2^2} = 0, \ldots \frac{d^2u}{dx_n^2} = 0.$$

Opløsning. Da $\frac{d^2u}{dx_1^2} = 0$. maa $A = \frac{du}{dx_1}$ ikke indeholde x_1; Integration giver $u = Ax_1 + B$ hvor B heller ikke indeholder x_1.

Altsaa er u lineær i enhver af de Variable.

A og B maa derfor være lineær i x_2, hvilket giver

$$u = (A_1 x_2 + B_1) x_1 + A_2 x_2 + B_2 = P_1 x_1 x_2 + P_2 x_1 + P_3 x_2 + P_4$$

hvor ingen Koefficient indeholder x_1 og x_2. Da P'erne maa være lineære i x_3, faas ved Indsættelse

$$u = Q_1 x_1 x_2 x_3 + Q_2 x_2 x_1 + Q_3 x_3 x_2 + Q_4 x_1 x_2 + Q_5 x_1 \\ + Q_6 x_2 + Q_7 x_3 + Q_8$$

hvor ingen Koefficient indeholder x_1, x_2, x_3.

Ved Induktion ses, at man har

$$u = Ax_1 x_2 \ldots x_n + \Sigma B x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + \Sigma C x_1 x_2 \ldots x_{n-2} + \ldots \\ + \Sigma K x_1 + L$$

hvor Betegnelsen er analog med den, der anvendes i de symmetriske Funktioners Theori, og alle Koefficienter ere arbitrære Konstanter. (L. Ankjær.)

(Ogsaa løst af Guldberg og A. W. Høst.)

Bevis for, at en algebraisk Ligning altid har en Rod.

(Af H. G. Zeuthen.)

Vi tænke os paa sædvanlig Maade Værdierne af den komplexe Størrelse $z = x + iy$ fremstillede ved Punkterne (z) af en Plan. Naar da z varierer saaledes, at den ender med sin Begyndelsesværdi, vil Punktet z gjennemløbe en lukket Kurve.

Er $\varphi(z)$ en algebraisk irrational Funktion, om hvilken vi her kunne nøjes med at antage, at den ikke bliver diskontinuert for nogen endelig Værdi af z, vil den i Almindelighed for en opgiven Værdi af z have flere Værdier. For visse Punkter z ville dog to eller flere af disse blive lige store. Et saadant Punkt kaldes et Forgreningspunkt.

Naar Punktet z gjennemløber en lukket Kurve, og naar det af den begrænsede Areal ikke indeslutter noget Forgreningspunkt, og man begynder med at tillægge $\varphi(z)$ en af sine Værdier, vil den have samme Værdi, naar z vender tilbage til sit Udgangspunkt. Dette er nemlig indlysende, naar den lukkede Kurve svinder ind til et Punkt. Denne Grænseform kan kontinuert omdannes til en hvilkensomhelst anden af dens Former, uden at derved nogen af de passerede Overgangsformer gaar gjennem noget Forgreningspunkt. Den Værdi, som skal tages for $\varphi(z)$ i ethvert Punkt af Kurven, vil da være fuldkommen bestemt ved dennes umiddelbart foregaaende Stilling, idet en Overgang til en anden af $\varphi(z)$'s Værdier vilde være et endeligt Spring, som vilde stride mod $\varphi(z)$'s Kontinuitet. Dette vilde derimod ikke være Tilfældet, hvis en af Kurvens Overgangsstillinger indeholdt et Forgreningspunkt.

Jeg vil nu antage, at den givne algebraiske Ligning er

$$f(z) = 0,$$

hvor $f(z) = z^n + a z^{n-1} + \ldots$ er en algebraisk hel og rational Funktion af n'te Grad med reelle eller komplexe Koefficienter, og jeg vil sætte

$$\varphi(z) = [f(z)]^{\frac{1}{2n}}$$

og lade Punktet z gjennemløbe en Cirkel med Radius r om Begyndelsespunktet. Da er

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

hvor r forbliver konstant, medens θ varierer fra o til 2π.

Vi kunne indføre denne Værdi i f(z), idet vi tillige omskrive f(z) paa følgende Maade:

$$f(z) = z^n(1 + \frac{a}{z} + \ldots)$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\,\varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

ϱ og α, som ere Modulus og Argument til den sidste Faktor ville vel variere med θ; men ved at gjøre r tilstrækkelig stor kan man altid holde denne Faktors Afvigelse fra 1 og derved ϱ's og α's Afvigelser fra 1 og o under hvilkesomhelst opgivne Grænser. En Værdi af $\varphi(z)$ — hvoraf de øvrige bestemmes ved Multiplikation med de 2n Værdier af $1^{\frac{1}{2n}}$ — bliver da

$$\varphi(z) = \sqrt[2n]{r}\,\sqrt[2n]{\varrho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2n} + i\sin\frac{\alpha}{2n}\right).$$

Lader man heri θ variere fra o til 2π og fastholder, at $\varphi(z)$ skal variere kontinuert, ville ϱ og α ganske vist variere; men $\sqrt[2n]{\varrho}$ vedbliver at betegne den positive Rod af ϱ, og $\frac{\alpha}{2n}$ kan ikke gaa over til en af de andre Værdier $\frac{\alpha'}{2n} = \frac{\alpha + 2p\pi}{2n}$, som den ved Roduddragningen kan faa, da det kun vilde kunne ske ved et pludseligt Spring fra en Værdi, hvis Afvigelse fra o ligger under en vis Grænse til en, hvormed dette ikke er Tilfældet. Faktoren $\cos\frac{\alpha}{2n} + i\sin\frac{\alpha}{2n}$ vil altsaa ende med den samme i Nærheden af 1 beliggende Værdi som den, hvormed den begyndte. Derimod vil $\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$ variere fra $+1$ til -1. Heraf følger at $\varphi(z)$ ender med at faa en anden Værdi end den, hvormed der begyndtes. Der maa

altsaa ligge et eller flere Forgreningspunkter indenfor Cirklen. Et saadant faas kun for f(z) = 0, da Værdierne af

$$\varphi(z) = \left(\cos\frac{2p\pi}{2n} + i\sin\frac{2p\pi}{2n}\right)\sqrt[2n]{f(z)},$$

ere indbyrdes forskjellige for alle andre endelige Værdier af z end dem, der gjøre f(z) = 0. Der maa altsaa existere saadanne Værdier.

Analytisk Løsning og nogle Almindeliggjørelser af den Opgave: paa en Kugleflade at finde en Kurve med konstant Krumning.

(Af H. G. Zeuthen.)

Ved Meuniers Theorem (eller ved de samme Differentiationer, som have ført til Meuniers Theorem) finder man let, at en saadan Kurves oskulerende Plan har en konstant Afstand fra Kuglens Centrum. Tages dette til Begyndelsespunkt for et retvinklet Koordinatsystem x, y, z, og kaldes den oskulerende Plans Retningscosinus'er (ej blot som sædvanlig Tal, der forholde sig som disse) A, B, C, haves

$$Ax + By + Cz = k \tag{1}$$

hvor k er en Konstant, endvidere

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \tag{2}$$

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \tag{3}$$

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0. \tag{4}$$

Tillige haves, naar Kuglens Radius er r,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{5}$$

Ved Elimination mellem disse 5 Ligninger og den sidstes Differentialligninger af A, B, C og z med dens Differentialkoefficienter med Hensyn til den uafhængige Variable, f. Ex. x, faas en Differentialligning af anden Orden i x og y.

For at bevare Symmetrien kan man imidlertid ogsaa endnu lade den uafhængige Variable være vilkaarlig og gaa saaledes tilværks.

Ligningerne (1), (2), (3) give ved Differentiation, naar Hensyn tages til (3) og (4),

$$\left.\begin{aligned} x\,dA + y\,dB + z\,dC = 0, \\ A\,dA + B\,dB + C\,dC = 0, \\ dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

som kræve, at enten

$$dA = 0,\ dB = 0,\ dC = 0 \qquad (7)$$

eller

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

(7) forbunden med (2) giver, at A og B ere vilkaarlige Konstanter, medens $C = \sqrt{1 - A^2 - B^2}$, hvorefter (1) og (5) ville fremstille den søgte Kurve. Da de to Konstanter A og B kunne bestemmes saaledes, at Kurven gaar gjennem et givet Punkt og deri faar en given Tangent, er det fundne Integral det fuldstændige Integral.

Naar man kvadrerer Determinanten (8) og benytter Ligningerne (1), (2), (3), (5) og den sidstes Differentialligning

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \qquad (9)$$

faar man Ligning (8) ombyttet med følgende:

$$\begin{vmatrix} r^2 & 0 & k \\ 0 & ds^2 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = (r^2 - k^2)\,ds^2 = 0,$$

eller, naar $r^2 > k^2$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \qquad (10)$$

Denne Ligning kan, naar dx, dy, dz skulle være reelle aabenbart kun tilfredsstilles af $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ altsaa ikke af en Kurve, men kun af et enkelt, men vilkaarligt Punkt af Kuglen. Fordre vi derimod ikke Realitet, faar man af denne samt (5) og (9) en Differentialligning i x og y, som kun er af første Orden, og altsaa kun kan føre til et singulært eller maaske blot et partikulært Integral af den oprindelige Differentialligning af anden Orden. Dette Integral skulle vi nu søge.

Eliminationen giver

$$(xdy - ydx)^2 - r^2(dx^2 + dy^2) = 0, \qquad (11)$$

eller, naar man sætter $\frac{dy}{dx} = p$,

$$y - px = \pm r\sqrt{1 + p^2},$$

som er en Clairautsk Differentialligning. Dens fuldstændige Integral er

$$y = \alpha x \pm r\sqrt{1 + \alpha^2} \qquad (12)$$

og dens singulære Integral

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (13)$$

Dette sidste vedkommer dog ikke Ligning (10) eller den oprindelig stillede Opgave, men kun den ved Elimination af z dannede Differentialligning (11) for Projektionerne ind paa xy-Planen af Linier, der have den opgivne Egenskab. Disse Projektioner ville, blot fordi de høre til Linier paa Kuglefladen, have dennes Kontur (13) til Indhyllingskurve.

Vi skulle altsaa endnu kun beskjæftige os med de Linier, hvis Projektioner fremstilles ved Ligning (12), som maa være Kuglens Skjæringslinier med de ved samme Ligning fremstillede, paa xy-Planen vinkelrette Tangentplaner. Enhver af disse skjærer Kuglen i to imaginære rette Linier, hvis Projektioner paa (x, z)-Planen ifølge (12) og (5) fremstilles ved

$$z = \pm\sqrt{-1}\,(\pm x\sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha r), \qquad (14)$$

hvor Fortegnet for $\sqrt{1 + \alpha^2}$ er det samme som i (12). Ved i (12) og (14) at tillægge α alle mulige reelle og imaginære Værdier faar man alle Kuglens retliniede imaginære Frembringere. Da man gjennem en saadan kan lægge en (imaginær) Plan, hvis Afstand fra Kuglens Centrum er k, ere disse Løsninger dog indbefattede i det allerede fundne fuldstændige Integral og give altsaa ikke et singulært, men kun partikulære Integraler.

Medens de ved Ligningerne (12) og (14) bestemte Integraler ere imaginære og altsaa ikke umiddelbart have nogen geometrisk Betydning, vil Sagen kunne stille sig anderledes i en almindeligere Opgave, der indbefatter den her løste, og

som løses ganske paa samme Maade, nemlig den at finde de Kurver paa en Flade af anden Orden, φ, hvis oskulerende Planer berøre en med den første koncentrisk, ligedannet og ligedan beliggende Flade, ψ. I Stedet for med nye Betegnelser at tage fat paa Løsningen af denne almindeligere Opgave skulle vi bemærke, at den foreligger i de alt fremsatte Ligninger, naar man i disse overalt ombytter x, y, z med $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$, hvorved navnlig Kuglens Ligning ombyttes med

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = r^2.$$

For at undgaa den imaginære Form, som nogle af Ligningerne vilde faa naar f. Ex. c var negativ, kan man i dette Tilfælde samtidig ombytte C med $C\sqrt{-1}$. Det vil ses, at naar a og b ere positive, c negativ, Fladen φ altsaa en vindskjæv Hyperboloide, ville (12) og (14) fremstille dennes reelle retliniede Frembringere. At disse maa give Opløsninger af den stillede Opgave, beror paa, at en ret Linies oskulerende Plan er en vilkaarlig Plan, som indeholder den, og at man altsaa ogsaa kan betragte den Plan derigjennem, som tillige berører den anden Flade, ψ, som oskulerende Plan. At disse Linier dog frembyde sig paa en saadan Maade, at man kunde vente, at de vare singulære Integraler, beror paa, at medens man gjennem en anden Tangent til Fladen φ kan lægge to Tangentplaner til Fladen ψ, og den altsaa berører 2 af de søgte Kurver, gaar der gjennem en Frembringer i φ kun én Tangentplan til ψ, nemlig den som tillige indeholder det fælles Centrum.

Virkelige singulære Integraler faas derimod ved en yderligere Almindeliggjørelse af den stillede Opgave, nemlig den, hvor φ og ψ ere vilkaarlige Flader.

Man kan da bruge Ligning

$$Ax + By + Cz = 1 \qquad (1')$$

til Fremstilling af den oskulerende Plan, hvor A, B og C, der skulle være denne Plans Koordinater, maa tilfredsstille en Ligning

$$\psi(A, B, C) = 0, \qquad (2')$$

som udtrykker, at den berører Fladen ψ (Fladen ψ's »Ligning i Plankoordinater«). Ligningerne (3) og (4) blive uforandrede

$$A dx + B dy + C dz = 0, \qquad (3)$$

$$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0. \qquad (4)$$

Ligningerne (5) og (9) ombyttes derimod med Ligningen for Fladen φ i Punktkoordinater og dens første Differentialligning

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0. \end{array}\right\} \qquad (5')$$

(1'), (2') og (3) give ved Differentiation

$$\left.\begin{array}{c} x\,dA + y\,dB + z\,dC = 0 \\ \frac{d\psi}{dA} \cdot dA + \frac{d\psi}{dB} dB + \frac{d\psi}{dC} = 0 \\ dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = 0, \end{array}\right\} \qquad (6')$$

der tilfredsstilles enten af konstante Værdier af A, B og C, der blot skulle tilfredsstille (2'), eller af

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ \frac{d\psi}{dA} & \frac{d\psi}{dB} & \frac{d\psi}{dC} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8')$$

Som fuldstændigt Integral faas altsaa som før Ligningerne for de ved Tangentplanerne til ψ udskaarne plane Snit i φ.

Naar man mellem Ligning (8') og (1'), (2') og (3) borteliminerer A, B og C, faas en Differentialligning af første Orden i x, y og z, af hvilken man ved (5') kan bortelimiere f. Ex. z og dz, saa man faar en Differentialligning af første Orden i x og y. (8') vil saaledes føre til et singulært Integral med kun én variabel Parameter, eller i et saadant specielt Tilfælde som det allerede behandlede til et partikulært Integral. De ved det singulære Integral fremstillede Kurver ville i Almindelighed i ethvert Punkt have Berøring af anden Orden med en Kurve fremstillet ved et partikulært Integral.

Dette følger af, at de faa samme oskulerende Plan og ligge paa samme Flade.

Den geometriske Egenskab, der karakteriserer de ved dette singulære Integral fremstillede Kurver, fremgaar af de 3 Ligninger (6'). Disse udtrykke, at Punkterne (x, y, z) og (x + dx, y + dy, z + dz), der ifølge (1'), (2') og (3) ligge paa Tangentplanen A, B, C, til Fladen ψ, ogsaa ligge paa den konsekutive Tangentplan (A + dA, B + dB, C + dC) eller med andre Ord, at den selv er en Tangent til Fladen ψ. De ved (8') i Forbindelse med (1'), (2') og (3) bestemte Kurver paa φ have altsaa den Egenskab, at deres Tangenter tillige berøre Fladen ψ. Tangenterne i et Punkt P af φ findes da ved fra P at trække Tangenter til den Kurve, hvori Tangentplanen i φ skjærer ψ.

Den her behandlede Bestemmelse vil aabenbart, naar man anvender Dualitetsprincipet føre til en Bestemmelse af ganske samme Art. De konsekutive Punkter x, y, z og (x + dx, y + dy, z + dz) skulle ligge paa Skjæringslinien mellem de konsekutive Planer (A, B, C) og (A + dA, B + dB, C + dC), ligesom ogsaa i den stillede Opgave Bestemmelsen af den oskulerende Plan til en Kurve ved tre konsekutive Punkter af denne svarer til Bestemmelsen af et Kurvepunkt som Skjæringspunkt mellem tre konsekutive oskulerende Planer.

Heraf kan man slutte, at man maa komme til rigtige Ligninger ved overalt i de allerede benyttede at ombytte Bogstaverne x, y, z med A, B, C samtidig med, at man ombytter Funktionerne φ og ψ. Den eneste ikke allerede angivne Ligning, man derved faar af (1')—(6') er

$$x d^2 A + y d^2 B + z d^2 C = 0;$$

men denne udledes let af den første og sidste Ligning (6'). Som svarende til Ligning (8') faar man til Bestemmelsen af Indhyllingsfladen for de oskulerende Planer

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, \\ dA, & dB, & dC, \\ \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi}{dz} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8'')$$

Af særlig Interesse er det Tilfælde, hvor Fladerne φ og ψ falde sammen til én, der da har (5') eller (2') til Ligning, eftersom man bruger Punkt- eller Plankoordinater. Gjennem et Punkt P af Fladen vil da af singulære Integralkurver for det første gaa Grene, hvis Tangenter foruden i P berøre Fladen i andre Punkter. Ved disses Bestemmelser er (A, B, C) Fladens Tangentplan i dette andet Punkt. Da Kurvens Tangent her bliver en Dobbelttangent til Fladen, vil den i det Tilfælde, hvor Punktet x, y, z falder sammen med Berøringspunktet for (A, B, C), faa Berøring af 3die Orden med Fladen. Da der nu ikke i ethvert Punkt af Fladen findes saadanne Tangenter, vil denne Sammenfalden ikke kunne finde Sted i et vilkaarligt Punkt af Fladen.

Derimod vil der gjennem et vilkaarligt Punkt af Fladen gaa en anden Art af de søgte Kurver, nemlig saadanne, hvis Punkter (x, y, z) alle falde sammen med den tilhørende oskulerende Plan (A, B, C)'s Berøringspunkt med samme Flade, hvor Kurvens oskulerende Plan altsaa er Fladens Tangentplan. Ligning (8') vil i dette Tilfælde tilfredsstilles uafhængig af dx, dy, dz. Man maa nemlig her have

$$\frac{x}{\frac{d\psi}{dA}} = \frac{y}{\frac{d\psi}{dB}} = \frac{z}{\frac{d\psi}{dC}}, \qquad (9')$$

hvad der let ses, naar man bemærker, at Røringspunktet for en Plan, der tilfredsstiller Fladens Ligning i Plankoordinater, maa bestemmes ganske paa samme Maade som Tangentplanen i et Punkt, der tilfredsstiller Fladens Ligning i Punktkoordinater. I et saadant Tilfælde maa Ligning (8') som bekjendt ombyttes med den, som dannes deraf ved Differentiation. Differentiationen er nemlig i Almindelighed tilladt ved Ligning (8'), da den tilfredsstilles i ethvert Punkt af den derved fremstillede Kurve, og giver i Almindelighed Ligninger mellem de Variables højere Differentialer. Den maa altsaa ogsaa være tilladt i det her betragtede Grænsetilfælde, men fører da til en Relation mellem dx, dy og dz.

Ved de bekjendte Regler for en Determinants Differentiation giver Differentiationen af (8'), naar (9') finder Sted, at

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ dx, & dy, & dz \\ d\frac{d\psi}{dA}, & d\frac{d\psi}{dB}, & d\frac{d\psi}{dC} \end{vmatrix} = 0, \qquad (10')$$

hvor $d\frac{d\psi}{dA} = \frac{d^2\psi}{dA^2} dA + \frac{d^2\psi}{dA \cdot dB} dB + \frac{d^2\psi}{dA \cdot dC} dC$ o.s.v. Forholdene mellem dA, dB og dC bestemmes her ved den første og den sidste Ligning (6'), hvorefter man faar en Ligning af anden Grad i dx, dy, dz, eller idet dz bortelimineres ved (5'), en Ligning af anden Grad i $\frac{dy}{dx}$. Igjennem et vilkaarligt Punkt af Fladen gaar altsaa to af de søgte Kurver.

Vi skulle lige strax give Ligningen i $\frac{dy}{dx}$ i en bekvemmere Form end den, der udledes af de her anførte Ligninger. Disse kan man derimod give en anden Anvendelse. De vise, naar man multiplicerer Pillerne i Determinanten (10') med dA, dB, dC og adderer rækkevis, at

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d^2\psi}{dA^2} dA^2 + \frac{d^2\psi}{dB^2} dB^2 + \frac{d^2\psi}{dC^2} dC^2 \\ + 2\frac{d^2\psi}{dBdC} dBdC + 2\frac{d^2\psi}{dCdA} dCdA \\ + 2\frac{d^2\psi}{dAdB} dAdB = 0. \end{array}\right\} \qquad (11')$$

Denne Ligning bestemmer de to Linier gjennem (x, y, z), hvori Planer (A, B, C) berører Indhyllingsfladerne for de søgte Kurvers oskulerende Planer. Disse Linier ville iøvrigt ifølge Ligningerne (1')—(6') falde sammen med de søgte Tangenter.

Den Form for den Ligning mellem dx, dy, dz, som bestemmer de samme Linier, til hvilken vi nys sigtede, faas ved i (11') at foretage den dualistiske Ombytning, hvis Rigtighed vi have bevist. Man faar da

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2+\frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2+\frac{d^2\varphi}{dz^2}dz^2\\&+2\frac{d^2\varphi}{dydz}dydz+2\frac{d^2\varphi}{dzdx}dzdx+2\frac{d^2\varphi}{dxdy}dxdy=0.\end{aligned}\right\}(11'')$$

Denne Ligning viser, at de to søgte Tangenter ere Hovedtangenter ɔ: Asymptoterne til Indikatrix til Fladen φ i Punktet (x, y, z), eller hvad der er det samme Tangenterne til Skjæringskurven mellem Fladen og dens Tangentplan i samme Punkt. Man kommer til den sædvanlige Bestemmelse af disse Linier ved at antage Ligningen $\varphi = 0$ løst med Hensyn til z, eller skreven $f(x, y) - z = 0$. (11') bliver da til

$$r\,dx^2 + t\,dy^2 + 2\,s\,dx\,dy = 0,$$

hvor r, s og t have de sædvanlige Betydninger.

De geometriske Resultater, som vi her have bevist analytisk, lade sig alle let udlede af bekjendte geometriske Sætninger. Den udfoldelige Flade, der frembringes af en Rumkurves oskulerende Planer, har Kurvens Tangenter til Frembringere. Disse Frembringere maa berøre enhver Flade, som alle den udfoldelige Flades Tangentplaner berøre, en Sætning, der svarer dualistisk til den, at Tangenterne til en Kurve paa en Flade selv berøre Fladen.

Naar altsaa en Rumkurves oskulerende Planer skulle berøre en Flade ψ, og disse Planer virkelig frembringe en udfoldelig Flade, maa Kurvens Tangenter selv berøre ψ. De vilde altid frembringe en udfoldelig Flade, naar de ikke enten danne et Planbundt eller alle falde sammen. I det første af disse Tilfælde maa Kurven reduceres til en ret Linie, i det sidste er Kurven en plan Kurve. Da en ret Linie ogsaa er en plan Kurve, maa en Kurve, hvis oskulerende Planer berøre ψ være en plan Kurve, hvis dens Tangenter ikke selv berøre ψ.

De her fundne nødvendige Betingelser ere aabenbart ogsaa tilstrækkelige, naar Kurven ikke ligger paa selve Fladen ψ. Gjør den det, og skulle dens oskulerende Planer berøre Fladen i dens Berøringspunkter med Kurven, udleder man af

Meuniers Theorem, at de maa have Fladens Hovedtangenter til Tangenter.

Grunden til, at vi nu dog have fundet det værd at fremsætte de analytiske Beviser for de samme Sætninger, er, at disse Beviser give os Exempler paa Differentialligninger af første Orden, som ere singulære Integraler til Differentialligninger af anden Orden. Herved maa det erindres, at disse Ligninger ved Eliminationen af z kunne bringes til kun at indeholde x og y.

I Henseende til de her betragtede singulære Integraler kan fremhæves, at den dobbelte Maade, hvorpaa Ligningerne (6') eller (6) kunne tilfredsstilles, frembyder nogen Overensstemmelse med Spaltningen af Integralet i Clairauts Differentialligning, endvidere at de Kurver, som fremstilles ved de her fundne singulære Integraler enten have Berøring af anden Orden med dem, der fremstilles ved det fuldstændige Integral, eller i det sidst behandlede Tilfælde berøre dem i et Dobbeltpunkt.

En diskontinuert Faktor.

(Af L. Lorenz.)

I en med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille prisbelønnet Afhandling om »Mængden af Primtal under en given Grænse« har Dr. J. P. Gram vist, hvorledes en af Riemann fremstillet Formel, som i det mindste hidtil har dannet det vigtigste Grundlag for alle Forsøg paa at løse det nævnte Problem, lader sig udlede mere umiddelbart ved Anvendelsen af en diskontinuert Faktor. Denne, som er fremstillet under Form af et bestemt Integral, kan med en lille af Prof. Jul. Petersen (Oversigterne 1884, S. 15) indført Reduktion udtrykkes ved

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{x}{p}\right)^r \frac{dr}{r},$$

hvilket Integral har Værdien $2\pi i$ for $x > p$, Nul for $x < p$ og πi for $x = p$.

Gram har ogsaa prøvet andre Former og ytrer herom i sin Afhandling S. 29 følgende: »Det ligger nær at formode at man ved Anvendelsen af andre diskontinuerte bestemte Integraler end det, der ligger til Grund for hele denne Undersøgelse, maatte kunne erholde andre Former, som muligvis gave bedre Resultater. Men dette er ikke Tilfældet. Alle de, vi have forsøgt, vise sig at frembyde enten ganske de samme eller endog større Vanskeligheder,«.

Det er min Hensigt med de følgende Linier at vise, hvorledes denne diskontinuerte Faktor lader sig udtrykke under en paa en Gang simplere og mere generel Form, idet selve Integralformen viser sig at være overflødig, da der kun bliver virkelig Brug for en enkelt Egenskab ved Integrationsprocessen, som lader sig udtrykke ved en, saavel Integration og Differentiation som mange andre Operationer omfattende, simpel Fundamentalligning.

Lad

$$\left(\frac{x^r}{r}\right)$$

betegne en Faktor, som bliver 0 for $x < 1$, 1 for $x > 1$ og er endelig for $x = 1$, x altid antaget reel og positiv. Parenthesen staar som et Funktionsmærke, og Funktionen antages at tilfredsstille Fundamentalligningen

$$X(x^r R) + X_1(x_1^r R_1) + \ldots = (X x^r R + X_1 x_1^r R_1 + \ldots), \quad (1)$$

hvor $X, X_1 \ldots R, R_1 \ldots$ ere vilkaarlige Funktioner henholdsvis af $x, x_1 \ldots$ og af r.

Det følger af Faktorens Definition, at man maa have

$$\int_0^x F(x^1)\,dx^1 \left(\frac{x^{1r}}{r}\right) = \int_1^x F(x^1)\,dx^1, \quad x > 1,$$

for en hvilkensomhelst Funktion $F(x)$, alene forudsat at $F(x)(x-1)$ ikke bliver uendelig for $x = 1$.

Tillige er ifølge Fundamentalligningen

$$\int_0^x F(x^1)\,dx^1 \left(\frac{x^{1r}}{r}\right) = \left(\int_0^x F(x^1)\,dx^1 \frac{x^{1r}}{r}\right),$$

altsaa er

$$\left(\int_0^x F(x^1)\,dx^1 \frac{x^{1r}}{r}\right) = \int_1^x F(x^1)\,dx^1. \tag{2}$$

Sættes her $F(x) = x^{-\beta-1}$, og antages $x^{r-\beta} = 0$ for $x = 0$, hvilket forudsætter, idet r og β i Almindelighed betragtes som komplexe Størrelser, at den reelle Del af $r - \beta$ er positiv, erholdes ved Udførelsen af Integrationen og Multiplikation med x^β

$$\left(\frac{x^r}{r(r-\beta)}\right) = \frac{1}{\beta}(x^\beta - 1), \tag{3}$$

hvoraf atter ved Dekomposition af Brøken paa venstre Side

$$\left(\frac{x^r}{r-\beta}\right) = x^\beta. \tag{4}$$

Er $x < 1$, bliver i disse ligesom i alle de følgende Ligninger højre Side lig Nul.

Af den sidste Ligning, som giver

$$\left(\frac{x^{r-\beta}}{r-\beta}\right) = 1 = \left(\frac{x^r}{r}\right),\ x > 1,$$

ses det, at man i Faktoren har Lov til at forandre r til $r - \beta$, naar kun den reelle Del af denne Differens er positiv. Dette er Grunden til, at der for den diskontinuerte Faktor netop er valgt den antagne Form.

Ligning (4) kan i Henhold til Fundamentalligningen saavel differentieres som integreres med Hensyn til β. Ved m Gange Differentiation med Hensyn til β og ved derefter at sætte $\beta = 0$ erholdes

$$\left(\frac{x^r}{r^{m+1}}\right) = \frac{(\log x)^m}{[m]},\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

medens man ved at differentiere selve Faktoren m Gange med Hensyn til x erholdes

$$(x^r r^m) = 0,\ x \lessgtr 1,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ved Integration med Hensyn til β fra $\beta = a$ til $\beta = b$ erholdes endvidere af Ligningerne (4) og (3)

$$\left(x^r \log \frac{r-a}{r-b}\right) = \frac{x^b - x^a}{\log x}, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{x^r}{r} \log \frac{r-a}{r-b}\right) = \int_a^b \frac{d\beta}{\beta}(x^\beta - 1). \qquad (8)$$

Dette sidste Integral vil ogsaa kunne skrives

$$\int_a^b \frac{d\beta}{\beta}(x^\beta - 1) = \int_a^b \frac{d\beta}{\beta} x^\beta - \log \frac{b}{a},$$

naar det forudsættes, i Tilfælde af at Nulpunktet omskrives ved Integrationen, at begge Integrationer udføres ad samme Vej. Under denne Forudsætning gaar Ligning (8) over til

$$\left(\frac{x^r}{r} \log \frac{(r-a)\,b}{(r-b)\,a}\right) = \int_a^b \frac{d\beta}{\beta} x^\beta, \qquad (9)$$

som for $a = -\infty$, og idet dernæst b forandres til $-a$, bliver

$$\left(\frac{x^r}{r} \log \frac{a}{a+r}\right) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{d\beta}{\beta} x^\beta. \qquad (10)$$

Ved at addere dlsse to Ligninger og betragte a som en uendelig lille positiv Størrelse faar man paa højre Side Integrallogarithmen $Li(x^b)$, saaledes som denne sædvanlig defineres, saa at Resultatet kan skrives

$$\left(\frac{x^r}{r} \log \frac{b}{r-b}\right) = Li(x^b). \qquad (11)$$

De her fremstillede Ligninger omfatte netop alle de Tiifælde, som komme til Anvendelse ved den Riemann'ske Beregning af Primtalmængden, saaledes som denne Beregning nærmere er lagt tilrette af Dr. Gram i den omtalte Afhandling.

Om medelriktningen af en bruten eller krokig linie i planet.

(Af Arvid Lindhagen.)

För vissa praktiska ändamål behöfver man stundom bestämma medelriktningen af en bruten eller krokig linie. Att denna bestämning äfven ur matematisk synpunkt erbjuder något intresse, har varit anledningen till efterföljande uppsats.

För att bestämma medelriktningen af en bruten linie ABCDE... K tänker man sig; att man rör sig längs den brutna linien från dess ena ändpunkt A till den andra K. Den riktning, i hvilken man följer ett af liniens rätliniga element, är detta elements riktning. Man rör sig då först längs AB. Vid B viker man af t. ex. åt höger och följer linien BC, som bildar vinkeln v_1 med utgångsriktningen AB. Om man vid C ånyo viker af åt höger och följer linien CD, som bildar vinkeln v_2 med BC, så bildar CD vinkeln $(v_1 + v_2)$ med utgångsriktningen AB. Viker man däremot vid D af åt venster och följer linien DE, som bildar vinkeln v_3 med CD, så bildar DE vinkeln $(v_1 + v_2 - v_3)$ med utgångsriktningen AB. Om de n elementens vinklar med utgångsriktningen betecknas med $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, så är således

$$\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_2 = v_1$$
$$\varphi_3 = v_1 + v_2$$
$$\varphi_4 = v_1 + v_2 - v_3$$

o. s. v.

Vinklarna v räknas alltid mindre än 180^0, och deras tecken vid beräkningen af vinklarna φ beror på, huruvida de representera en afvikning åt ena eller andra sidan.

Om nu den brutna liniens element alla äro lika långa, så bestämmes deras medelriktning af en rät linie, som med utgångsriktningen bildar en vinkel m = aritmetiska mediet mellan vinklarna $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ så att följaktligen

$$m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n}{n}.$$

Om den brutna liniens hela längd är S, och h[illegible]ts

längd är Δs, så kan uttrycket för m skrifvas under formen

$$m = \frac{(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)\Delta s}{n \cdot \Delta s} = \frac{1}{S}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)\Delta s,$$

hvaraf

$$m S = (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\Delta s.$$

Är den brutna linien inskrifven i en kroklinie, och låter man Δs aftaga mot noll, så närmar sig S alltmer att angifva krokliniens längd, och i limes blir

$$m S = \int_0^S \varphi \, ds$$

eller

$$m = \frac{1}{S}\int_0^S \varphi \, ds. \qquad (1)$$

För att bringa denna integral till kvadratur behöfver man känna sambandet mellan s och φ, d. v. s. hvad engelsmännen kalla krokliniens »intrinsic equation«.

För en cirkel med radien r är

$$s = r\varphi$$

och således

$$m = \frac{1}{S}\int_0^S \frac{s}{r}\, ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{r} = \frac{1}{2}\Phi$$

om man med Φ förstår det värde på φ, som svarar mot $s = S$. En cirkelbåges medelriktning sammanfaller således med riktningen af bågens korda.

För en bruten linie, hvilkens rätliniga element icke äro lika långa utan hafva längderna $l_1 \ldots l_n$ och bilda vinklarna $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ med utgångsriktningen, erhåller man

$$m = \frac{l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}.$$

Af ekv. (1) erhålles vidare genom delvis-integration

$$m S = \Phi S - \int_0^\Phi s \, d\varphi$$

eller

$$m S = \int_0^\Phi (S - s)\, d\varphi.$$

Om man nu tänker sig en kroklinie utan singulära punkter, [illegible]mma lägger en tråd af krokliniens längd S och

fäster denna vid krokliniens begynnelsepunkt (där $s = 0$), så kommer trådens fria ända vid afveckling att beskrifva en evolvent til linien. Räknas evolventens längd från den gifna kurvans slutpunkt, betecknas dess bågelement med $d\sigma$ och dess hela längd med Σ, så är

$$d\sigma = -(S-s)\,d\varphi$$

hvaraf genom insättning i närmast föregående ekvation

$$mS = -\int_{\Sigma}^{0} d\sigma = \Sigma$$

eller

$$m = \frac{\Sigma}{S}.$$

En kroklinies medelriktning bildar således med utgångsriktningen en vinkel, som mätes af förhållandet mellan den på ofvannämda sätt bestämda evolventens längd och krokliniens egen längd.

Elementær Sphærisk Trigonometri, af H. Valentiner,

Kjøbenhavn 1889.

(Anmeldt af C. Crone.)

Medens man i Plantrigonometrien allerede i adskillige Aar har havt en saa fortræffelig Lærebog som Prof. Petersens, har man maattet savne en Sphærisk Trigonometri, der kunde benyttes i Forbindelse med den. Det Tillæg til den nævnte Plantrigonometri, som dens Forfatter har givet under Titlen »De sphæriske Grundformler«, er jo nemlig, selv i sin sidste udvidede Form, meget sammentrængt. Man maa derfor være Dr. Valentiner taknemmelig for hans Bog, der giver den sphæriske Trigonometris Sætninger og Methoder i en god og udførlig Fremstilling.

Hvad der falder i Øjnene som Nyt ved Dr. Valentiners Bog, er det første Afsnit »Indledende Sætninger«. Heri gives med geometrisk Begrundelse den Række Sætninger om Ulig-

heder mellem en sphærisk Trekants Stykker, som senere kommer til Anvendelse ved Trekanters Opløsning. At disse Sætninger, der almindelig udledes af Formlerne, her bevises geometrisk, er utvivlsomt heldigt, da de derved lettere binde sig til Hukommelsen. En enkelt Indvending maa Anm. her tillade sig. Naar Forf. ved Sætningen om, at 2 Siders Sum er større end den tredie, henviser til Beviset i J. Petersens Stereometri med Tilføielse af, at det er ufuldstændigt, men let kan fuldstændiggjøres ved Anvendelse af supplementære Trekanter, vilde det have været naturligt at give Beviset i sin fuldstændige Form. Den dertil nødvendige Sætning: at Summen af Siderne er $< 360^0$, er jo godtgjort lige iforveien.

Efter at Relationerne mellem den retvinklede Trekants Stykker ere beviste under Forudsætning af, at disse Stykker ere spidse, almindeliggjøres Beviserne ved Hjælp af de indledende Sætninger paa en Maade, som ikke vil kunne volde Eleven nogen Vanskelighed. Derimod vil det næppe være saa let for Eleven senere at følge Anvisningen til at almindeliggjøre Beviserne for Relationerne mellem den almindelige Trekants Stykker ved at regne med Fortegn. Det forekommer her Anm., at Delingen i retvinklede Trekanter, som Forf. ogsaa nævner, absolut er en lettere Vei.

I Bogens sidste Afsnit gives Formlerne til Beregning af den sphæriske Exes ved Siderne.

Bogen indeholder et betydeligt Antal gode Opgaver, der dels gaa ud paa at føre Beviser, dels paa at danne Formler til Beregning.

Danske Examensopgaver.

Afgangsexamen ved Søofficersskolen.

Foraaret 1890.

I. En ret Vinkel drejer sig om sin Vinkelspids, der ligger i en Ellipses ene Toppunkt. Find det geometriske Sted for

Skjæringspunktet mellem Tangenterne til Ellipsen i de Punkter, hvor den skjæres af Vinkelbenene.

Opløsning.*) Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ og Linien $y = \alpha(x + a)$ skjære hinanden foruden i Punktet $(-a, 0)$ endnu i et Punkt med Koordinaterne

$$x = a\frac{b^2 - a^2\alpha^2}{b^2 + a^2\alpha^2} \text{ og } y = \frac{2\alpha a b^2}{b^2 + a^2\alpha^2}.$$

Ligningen for Tangenten i dette Punkt er

$$\frac{x}{a}(b^2 - a^2\alpha^2) + 2a\alpha y = b^2 + a^2\alpha^2. \qquad (1)$$

Ligningen for den anden i Opgaven omtalte Tangent faas ved i (1) at ombytte α med $-\frac{1}{\alpha}$ og bliver

$$\frac{x}{a}(b^2\alpha^2 - a^2) - 2a\alpha y = b^2\alpha^2 + a^2.$$

Af (1) og (2) finder man

$$x = a\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Det geometriske Sted bliver altsaa en ret Linie vinkelret paa x-axen.

II. Til alle de Parabler, der fremstilles ved Ligningen $y^2 = px$, naar p antager alle mulige Værdier, trækkes Normaler fra Punktet (a, b). Vis, at det geometriske Sted for de Punkter, i hvilke de ere Normaler til Parablerne, er et Keglesnit, og bestem dette Keglesnits Axer i Størrelse og Beliggenhed.

Find Ordinaterne til de Punkter paa Parablen med Ligningen $y^2 = x$, hvis Normaler gaa gjennem Punktet $(\frac{31}{2}, -8)$.

Opløsning. Indsættes $x = a$, $y = b$ i Ligningen for Normalen til Parablen i Punktet (ξ, η) faas Betingelsen

$$2\xi\eta^2 + \eta^2 - 2a\xi - b\eta = 0.$$

Dette fremstiller en Ellipse med Centrum i Punktet

*) Løsningerne af Opgavestilleren Dr. phil. C. Crone.

$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Flyttes Begyndelsespunktet hen i dette Punkt, ses let Axelængderne at blive $\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+2b^2}$ og $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+b^2}$.

I Exemplet skal Normalens Fodpunkt bestemmes ved

$$\eta^2 = \xi \text{ og } 2\xi^2 + \eta^2 - 31\xi + 8\eta = 0,$$

som foruden $\eta = 0$, der er en fremmed Rod, giver

$$\eta^3 - 15\eta + 4 = 0.$$

Denne Lignings Rødder ere -4 og $2 \pm \sqrt{3}$.

III. Hvilken Kurve fremstiller $xy = 1$ i retvinklede Koordinater.

Find uden Anvendelse af Logarithmetavler:

1) Arealet begrændset af Abscisseaxen, Kurven og Koordinaterne svarende til $x = 1$ og $x = 1{,}1$ med 7 Decimaler.

2) Den Vinkel φ, som Kurvens Tangent i Punktet $\left(5, \frac{1}{5}\right)$ dannes med Abscisseaxen med 7 Decimaler, samt

3) Stykket t paa denne Tangent mellem Røringspunktet og Abscisseaxen med 5 Decimaler.

Opløsning.

1) Arealet $u = \int_1^{1,1} \frac{dx}{x} = l.1{,}1$

$$= 2\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{21}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{21}\right)^7 + \ldots\right)$$

$$= 0{,}0953081.$$

2) $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{25}\right)$.

$$\operatorname{arctg} 0{,}04 = 0{,}04 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}04^3 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}04^5 - \frac{1}{7} \cdot 0{,}04^7 \ldots$$

$$= 0{,}039978 = 2^0\, 17'\, 26''.$$

$\varphi = 177^0\, 42'\, 34''$.

3) Tangentens Ligning er

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}(x-5)$$

altsaa
$$t = \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$
$$= 5 + \frac{1}{250} - \frac{4}{10^5} + \frac{16}{10^8} e = 5{,}00396.$$

IV. Der er givet en Linie med Ligningerne: $\begin{array}{l} 5x + 2z = 5 \\ 5y + 3z = 10 \end{array}$ og en Plan med Ligningen: $2x - y + 3z = 1$. Ligningerne $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = z$ fremstille en Linie, der ligger i den givne Plan, er vinkelret paa den givne Linie, og har Afstanden $\frac{1}{\sqrt{798}}$ fra denne Linie. Bestem x_1, y_1, a og b.

Opløsning. Den givne Linies Ligning kan skrives
$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z}{5}.$$

Retningskoefficienterne for den søgte Linie bestemmes da ved
$$-2a + b - 3 = 0$$
$$-2a - 3b + 5 = 0,$$

hvoraf $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$, saa at den søgte Linies Ligning vil være
$$\frac{x - x_1}{-1} = \frac{y - y_1}{4} = \frac{z}{2}. \qquad (1)$$

Den fælles Vinkelrettes Retningskoefficienter A_1, B_1 og C_1 bestemmes ved
$$-2A_1 - 3B_1 + 3C_1 = 0$$
$$-A_1 + 4B_1 + 2C_1 = 0,$$

hvoraf
$$\frac{A_1}{-26} = \frac{B_1}{-1} = \frac{C_1}{-11},$$

saa at dennes Retningscoss. ere
$$\frac{26}{\sqrt{728}}, \frac{1}{\sqrt{728}}, \frac{11}{\sqrt{728}}.$$

Afstanden mellem den givne og den søgte Linie skal nu være numerisk lig $\frac{1}{\sqrt{798}}$. Man faar derved

$$\frac{26(1 - x_1) + (2 - y_1)}{\sqrt{798}} = \pm \frac{1}{\sqrt{798}},$$

hvoraf enten $26x_1 + y_1 = 27$

eller $26x_1 + y_1 = 29$.

x_1 og y_1 skulle nu bestemmes af en af disse sammen med $2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$ — hvorved man erindrer, at man i den sidstnævnte strax tør indsætte $z_1 = 0$.

Man finder derved

enten $x_1 = 1, \quad y_1 = 1$

eller $x_1 = \frac{15}{14}, \quad y_1 = \frac{8}{7},$

der altsaa blive at sætte ind i Ligning (1).

Opgaver til Magisterkonferenser.

Magisterkonferens i Fysik.

(1889.)

Opgave til Besvarelse i sex Uger.

At give en Fremstilling af de Forsøg, der ere gjorte paa at vise en Lovmæssighed i Spektralliniernes Fordeling og en Sammenhæng mellem Stoffernes kemiske og fysiske Egenskaber og deres Emissions og Absorptionsspektrer.

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

1) Udled Betingelsen for at Ligningen

$$M dx + N dy + P dz = 0,$$

hvor M, N og T ere Funktioner af x, y og z integreres ved en Ligning med to uafhængige indeholdende en arbitrær Constant og angiv, hvorledes Integrationen udføres, naar Betingelsen er opfyldt. Anvendes paa Ligningen

$$z(y^2 + z^2) dx - xyz dy + x(x^2 + y^2) dz = 0.$$

2) Hvorledes afhænger Jernets Magnetisme af den magnetiserende Kraft?

Desuden forlangtes en praktisk Prøve i Kemi (en Analyse).

Løsning paa Opgaven i Mathematik.

Den almindelige Betingelse er

$$M\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)+N\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)+P\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0,$$

og denne er tilfredsstillet i det opgivne Exempel.

Man kan derfor sætte $dx = 0$ og integrere

$$-xyz\,dy + x(x^2+y^2)\,dz = 0,$$

der foruden $x = 0$ giver

$$u = \varphi(x)\,z^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

Indsættes denne Værdi for u i

$$\frac{\frac{du}{dx}}{M}=\frac{\frac{du}{dy}}{N}=\frac{\frac{du}{dz}}{P},$$

faar man $\varphi(x) = 1 + c^2x^2,$

og det almindelige Integral

$$x^2+y^2+z^2 = c^2x^2z^2.$$

(C. J.)

Magisterkonferens i Mathematik.

(1890.)

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Der forlanges en historisk kritisk Fremstilling af Theorien for singulære Integraler (partikulære Opløsninger) til Differentialligninger af første Orden mellem to Variable.

Skriftlige Opgaver i Mathematik til Besvarelse i 4 Timer.

1) Hvorledes bestemmes en Flades Kuglepunkter. Anvendes paa den Flade, hvis Ligning i retvinklede Koordinater

faas ved Elimination af θ og φ mellem

$$x = a \cos\theta$$
$$y = b \sin\theta \cos\varphi$$
$$z = c \sin\theta \sin\varphi$$

hvor $a > b > c$.

2) En tung homogen ret cirkulær Cylinder ruller uden at glide i en anden hul Cylinder, hvis Hulhed har dobbelt saa stor Radius som den første Cylinders. Den hule Cylinder rører ved Bevægelsens Begyndelse den faste i en Frembringer i samme Højde som Axen. Bestem Bevægelsen og sammenlign Tyngdepunktets Hastighed med den, det vilde have faaet, hvis hele Cylindrens Masse havde været samlet i dens Axe.

Skriftlig Opgave i Fysik til Besvarelse i 4 Timer.

Den galvaniske Polarisation.

Løsning af de mindre Opgaver i Mathematik.

Fladens Ligning bliver

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

og dennes reelle Kuglepunkter findes som bekjendt ved

$$y = 0, \quad z = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\, x.$$

Geometrisk bestemmes de som Røringspunkter mellem Fladen og de med Cirkelsnitsplanerne parallele Tangentplaner.

2) Principet for den levende Kraft giver

$$2g \frac{a}{2} \sin\theta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + k^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \qquad (1)$$

hvor a er den faste Cylinders Radius, φ den Vinkel, som den bevægelige Cylinder har drejet sig om sin egen Axe, og θ den Vinkel, som denne har drejet sig om den fastes Axe. Da $k^2 = \frac{a^2}{8}$ og $\varphi = 2\theta$, faaar man

$$g \sin \theta = \frac{3a}{4} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

hvoraf

$$t = \sqrt{\frac{4g}{3a}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}},$$

et Udtryk, der let reduceres til den sædvanlige Normalform for et elliptisk Integral af første Art.

Antager man, at den rullende Cylinders Masse — der er antaget lig 1 — skal være samlet i den Axe, maa man i (1) sætte k = 0, hvorved man faar

$$g \sin \theta = \frac{a}{4} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Ved den nævnte Antagelse bliver altsaa Hastigheden i Overensstemmelse med sædvanlige fysiske Principer forøget, og det sker i Forholdet $\sqrt{3} : 1$.

(C. J.)

Magisterkonferens i Fysik.

(1890.)

Opgave til Besvarelse i 6 Uger.

Der gives en Fremstilling af de experimentale og theoretiske Undersøgelser, der have været anstillede over Luftarters Udstrømning gjennem et Hul, og en anskuelig Sammenstilling af de Resultater, hvortil de forskjellige Experimentatorer ere komne.

Mindre Opgaver til Besvarelse i 4 Timer.

1) Bestem de Kurver, for hvilke Produktet af Tangentens Afstande til to faste Punkter er konstant.

2) Det legemlige Penduls Theori udvikles. En tung homogen Kugle kan dreje sig om en horizontal Axe, der ligger som Tangent til Kuglen. Bestem Kuglens Svingningstid for smaa Svingninger.

Desuden en praktisk Prøve i Kemi (en Analyse).

Løsning af de mathematiske Opgaver.

1) Antage vi, at Tangentens Ligning er

$$y - y_1 = p(x - x_1),$$

hvor $p = \frac{dy}{dx}$, og antages de faste Punkters Koordinater at være $(+c, o)$ og $(-c, o)$, faar man Betingelsen

$$\frac{(y - px)^2 - c^2 p^2}{1 + p^2} = b^2,$$

hvor b^2 er det opgivne Produkt. Sættes $c^2 + b^2 = a^2$, giver den ovenstaaende Ligning

$$y = px \pm \sqrt{a^2 p^2 + b^2}, \tag{1}$$

der er et specielt Tilfælde af Claireauts Differentialligning. De partikulære Integraler faa samme Form som (1), idet p antages Constant, og for $p = -\cot v$ faas Ligningen for en af de i (1) indeholdte rette Linier paa følgende Normalform

$$x \cos v + y \sin v = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}. \tag{2}$$

Det singulære Integral dannes paa sædvanlig Maade af (1) eller erkjendes af (2) at være et Keglesnit med Centrum, for hvilket de givne ~~Tangenter~~ ere Brændpunkter. Det samme sés simplere ved Benyttelse af Liniekoordinater eller, om man vil, rent geometrisk. Punkter

2) Det i Opgaven omtalte legemlige Pendul svinger som et mathematisk Pendul med Længden $r + \frac{2}{5} r = \frac{7}{5} r$, idet r er Kuglens Radius.

(C. J.)

Løste Opgaver.

4. Hvorledes integreres Differentialligningen

$$2\left(y \frac{dy}{dx} - x\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = o?$$

(P. T. F.)

Løsning 1.

Emedan $\qquad p\,dx = dy$

så kan den gifna ekvationen

$$2(yp - x)dp + p^2dy - dy = 0 \qquad (1)$$

skrifvas under formen

$$2ypdp + p^2dy - 2xdp - 2pdx + dy = 0.$$

Venstra ledet är nu en exakt differential, och genom integration blir

$$yp^2 - 2xp + y = c. \qquad (2)$$

Om x elimineras mellan ekv. (1) och (2), så erhållas (efter Divisjon med $p^2 - 1$)

$$ydp + pdy = -\frac{cdp}{p^2 - 1}$$

hvaraf

$$yp = c' + \frac{c}{2}\log\frac{p+1}{p-1}. \qquad (3)$$

Den fullständiga integralen till ekv. (1) framgår genom elimination af p mellan ekv. (2) och (3).

(A. L—n, Stockholm.)

Løsning 2.

Man ser strax at:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\frac{dy}{dx} = c.$$

Indføres de af Prof. Zeuthen i første Hæfte anførte Liniekoordinater, faas:

$$p^2\left(p\frac{dq}{dp} - q\right) - \frac{dq}{dp}p = c, \text{ eller}$$

$$\frac{dq}{dp}(p^3 - p) - p^2q = c, \text{ hvoraf faas:}$$

$$q = e^{-\int\frac{-p^2}{p^3-p}dp}\left(\int\frac{c}{p^3-p}\,e^{\int\frac{-p^2}{p^3-p}dp}\,dp + c_1\right)$$

$$q = e^{l(p^2-1)}\left(\int\frac{c}{p^3-p}\,e^{-\frac{1}{2}l(p^2-1)}\,dp + c_1\right)$$

$$q = \sqrt{p^2-1}\left(\int\frac{c}{p^3-p}\cdot\frac{dp}{\sqrt{p^2-1}} + c_1\right)$$

$$q = \sqrt{p^2-1}\left(c\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\right) + c_1\right)$$

$$q = c\sqrt{p^2-1}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} - 1 + c_1\sqrt{p^2-1}. \qquad (1)$$

Man skal da blot borteliminere p og q mellem

$$(1),\ yp^2 - xp = c \text{ og } y + q = px.$$

(A. W. Høst.)

Løsning 3.

Venstre Side af Differentialligningen

$$2(yy' - x)y'' + y'^3 - y' = 6, \qquad (1)$$

tilfredsstiller Betingelsen for at være en exakt Differentialkvotient (se cand. Foldbergs Afhandling S. 26), og man finder ved Integration

$$y(1 + y'^2) - 2xy' = c, \qquad (2)$$

hvor c er en arbitrær Konstant. Efter Division af (2) med $1 + p^2$, idet p betegner Differentialkvotienten y', Differentiation med Hensyn til x og Division med $\frac{dp}{dx}$ og $p^3 - p$ findes den lineære Ligning

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p(p^2+1)}x = \frac{-2c}{p^4 - 1}.$$

Der er her forudsat, at ingen af de tre Ligninger $1 + p^2 = 0$ $\frac{dp}{dx} = 0$, $p^3 - p = 0$, finde Sted. Da den anden Ligning indeholder den første og tredie, er det tilstrækkeligt at undersøge, om den er en Løsning af (1). Ved Indsætning af $y'' = 0$, eller $y = ax + c$ i (1), faas $a^3 - a = 0$, eller $a = 0, \pm 1$, og man har altsaa de tre singulære Løsninger af (1):

$$y = c + x,\quad y = c - x,\quad y = c.$$

Ovenstaaende lineære Ligning integreres ved

$$x = -2c\frac{p^2+1}{p^2}\int\frac{p^2}{p^2+1}\cdot\frac{dp}{p^4-1} + c_1\frac{p^2+1}{p^2},$$

idet

$$-2\int\frac{dp}{p(p^2+1)} = \mathrm{l}.\frac{p^2+1}{p^2},$$

og da endvidere

$$\int\frac{p^2dp}{(p^2+1)(p^4-1)} = \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{8}\mathrm{l}.\frac{p-1}{p+1},$$

findes $x = -\frac{c}{2p} - \frac{c(p^2+1)}{4p^2}\mathrm{l}.\frac{p-1}{p+1} + c_1\frac{p^2+1}{p^2}.$

Naar p elimineres af denne Ligning ved Hjælp af (2), findes den primitive Ligning, der er af en noget kompliceret Form. Denne i Forening med de ovenfor fundne singulære Løsninger ere de eneste mulige Løsninger af (1).

(J. L. W. V. Jensen.)

(Ogsaa løst af F. R. Åkerlund og H. Guldberg — der giver Resultatet i explicite Form.)

Opgaver til Løsning.

9. Hvormange Ligninger, og hvilke, maa der opstilles mellem de 4 Variable

$$x_1,\ y_1,\ z_1 \text{ og } u_1$$

og hvormange og hvilke Ligninger mellem 4 andre Variable

$$x_2\ y_2\ z_2 \text{ og } u_2$$

(men altsaa ingen Ligning, hvori Tal med de to Indices forekomme i flæng), naar Ligningen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1}$$

derved skal blive identisk.

Hvilke Begrænsninger maa, for at tage samme Opgave geometrisk, to Systemer af Punkter i en Plan M og M' være underkastede, og hvilke Afhængigheder maa der være mellem sammenhørende Punkter M og M', fremdeles, hvilke Begrænsninger og indbyrdes Afhængigheder maa to andre Punktsystemer i Planen N og N' for sig være underkastede, naar Linier, der fra sammenhørende Punkter M og M' drages til hvilkesomhelst sammenhørende Punkter i de andre Systemer, henholdsvis N og N', altid skulle være parallele.

(Tidsskrift f. Math. Nr. 292.) (T. N. Thiele.)

10. Hvorledes maa man danne 4 Systemer af Punkter i Rummet, M, N, P og Q, hvilke Begrænsninger maa hvert

især være underkastet, og hvilke Afhængigheder maa der bestaa mellem hvert Punkt M og dets tilsvarende N, og mellem hvert Punkt P og dets tilsvarende Q, naar man blot ved saadanne Bestemmelser skal bevirke, at ethvert Punktpar M og N ligger i Plan med ethvert Punktpar P og Q.

(Tidsskrift f. Math. Nr. 293.) (Samme.)

11. En plan Linje er given ved Ligningen

$$f(x, y) = 0,$$

idet x og y ere Afstandene fra hvilket som helst Punkt M i Linjen til to i Linjens Plan liggende faste Punkter (Poler), hvis Afstand fra hinanden er p.

Hvorledes udtrykkes som Funktion af x, y, $\frac{df}{dx}$ og $\frac{df}{dy}$ det anharmoniske Forhold for det Straalebundt, som dannes af AM, BM samt Tangenten og Normalen til M?

(Chr. Hansen.)

12. I en fuldstændig Firkant, indskreven i en Cirkel, forbindes Midtpunkterne af de tre Par modstaaende Sider. Bevis at de Vinkler, disse Linier danne indbyrdes, ere lig Vinklerne i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Skjæringspunkterne mellem de modstaaende Sider.

(Tidsskrift for Math. 529.) (A. S. Bang.)

13. Hvormange 9-cifrede Tal have Tværsummmen 9?

(Maanedsskrift for Math. 344.) (Samme.)

14. Hvad er Summen af Kvadraterne paa alle de Tal som fremkomme ved Ombytning af Cifrene i Tallet

123456789? (Samme.)

15. Naar A, B, C, D og E ere Vinkler i en Femkant, da er

$$\sin A \sin C \sin D \sin (A - B) \sin (B - C + D)$$
$$+ \sin B \sin D \sin E \sin (B - C) \sin (C - D + E)$$

$+ \sin C \sin E \sin A \sin (C - D) \sin (D - E + A)$
$+ \sin D \sin A \sin B \sin (D - E) \sin (E - A + B)$
$+ \sin E \sin B \sin C \sin (E - A) \sin (A - B + C)$
$+ \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - D) \sin (D - E) \sin (E - A) = 0.$

(Samme.)

16. Hvormange reelle Rødder har Ligningen

$$adx^4 + 2d^2x^3 + 6bdx^2 + 4(b^2 - ac)x - 3cd = 0.$$

(Tidsskrift f. Math. 376.)

17. En Flade af anden Orden drejer sig om en Diameter Find det geometriske Sted for Polen til en fast Plan og for den reciproke Polarlinie til en fast ret Linie samt Indhyllingsfladen for Polarplanen til et fast Punkt.

(Tidsskrift f. Math. 324.)

18. Man skal ad elementær Vej summere de uendelige Rækker

$$y^n + (y+k)^n \frac{x}{[1]} + (y+2k)^n \frac{x^2}{[2]} + (y+3k)^n \frac{x^3}{[3]} + \ldots,$$

$$y^n + (y+k)^n \frac{a}{1} x + (y+2k)^n \frac{a(a-1)}{1.2} x^2$$

$$+ (y+3k)^n \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

$$(y+k)^n \frac{x}{1} - (y+2k)^n \frac{x^2}{2} + (y+3k)^n \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

idet n er positiv hel og Rækkeudviklingerne for e^x, $(1+x)^a$ og $l.(1+x)$ forudsættes bekjendte.

Mere almindelig skal man angive Summen

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r (y+rk)^n x^r, \quad \text{idet} \quad \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^n = f(x),$$

og heraf udlede en Formel for $\frac{d^n f(e^x)}{dx^n}$.

(Tidsskrift f. Math. 403.) (J. L. W. V. Jensen.)